

Seminaire Bourdoki I
相対論的量子論に関する基礎的考察 III
シンプレクティック多様体の「量子化」

1. シンプレクティック多様体の「量子化」の概要

II において、コタンジェントバンドルがいかに微分作用素のなす環と結びつけられるか、という問題について述べた。

そこでも触れたように、この操作を一般化してシンプレクティック多様体の「量子化」をすることを考えることができる。

シンプレクティック多様体 (M, ω) とは、 C^∞ 多様体 M と、その上の非退化閉 2-形式 ω の組のことである。 ω が非退化であることにより、 ω は

- (1) T^*M 上の非退化二次形式 α を与える。
- (2) TM と T^*M の間の同型を与える。
- (3) TM 上の非退化二次形式 β を与える。

という役割をもつことになる。

α を用いると、 $\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 上で定義された環 $C_\alpha^\infty(M)$ を次のように定義できる。

$$C_\alpha^\infty(M) = C^\infty(M) \otimes \mathbb{C}[\epsilon] \quad (\mathbb{C}[\epsilon]\text{-加群として})$$

$$C_\alpha^\infty(M)/(\epsilon) = C^\infty(M)$$

$$(f \otimes 1)(g \otimes 1) = fg \otimes 1 + \frac{1}{2}\alpha(df, dg) \otimes \epsilon \quad (\forall f, \forall g \in C^\infty(M))$$

この環は $C^\infty(M)$ を一次の無限小だけ変形したものである。これを ϵ が無限小ではなくて有限の大きさをもつところにまで伸ばせるかについてはいろいろな議論がある。(これについては例えば、

大森英樹著, 一般力学系と場の幾何学 裳華房, 1991 や

Woodhouse, Geometric Quantization Oxford, 1980

等を参照されたい。)

上の関係式に現れる $\alpha(df, dg)$ はしばしば f, g のポアソン括弧と呼ばれ、 $\{f, g\}$ と書かれる。 $f \otimes 1$ を \hat{f} と書き、この表記を使えば、最後の関係式は、 \hat{f}, \hat{g} の交換関係

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \epsilon(\{f, g\})$$

を与えることが分かる。これは物理学の成書等で「ポアソン括弧を交換子に置き換える」と書かれている事項の数学的な解釈の一方法である。

しかし、一般的なシンプレクティック多様体に対して如何にして非可換多様体を対応させるかが本稿の目的ではない。むしろ、非可換環が主であって、可換理論はその影である、という立場に立ち、「自然にシンプレクティック構造をもつ多様体には実は対応する自然な非可換多様体があるはずである。」という作業仮説を立てることにする。

ここにいう「自然にシンプレクティック構造をもつ」空間としては、射影代数多様体 (これはケーラー計量をもつ) や、一部のモデュライ空間を想定している。

2. 最初の例: コタンジェントバンドル

まず、コタンジェントバンドルの「量子化」の例の解説からはじめよう。

2.1. コタンジェントバンドルのシンプレクティック構造. M は C^∞ 多様体であるとする。 M のコタンジェントバンドル T^*M は、 M 上のコタンジェントベクトルのモデュライ空間ともみなせる。すなわち、 T^*M 上の点 (x, p) を決めることは、 M 上の点 x と、 x での M のコタンジェントベクトル $p \in T_x^*M$ とを与えるのと同様である。 p を T^*M に (余接写像で) 引き戻すことにより、各 (x, p) には「トートロジカルな」余接ベクトル θ_p が標準的に定まることが分かる。 θ_p は (もちろん) p に関して滑らかで、 T^*M 上の 1-形式 θ を定める。この議論から、 θ の座標表示は、

$$\theta = p_i dx^i$$

という具合になる。 T^*M のシンプレクティック構造とは、 $\omega = d\theta$ によって定められるもののことをいう。(この定義のいいところは座標のとり方によらないところと、 $d\omega = 0$ が自明であるというところである。 ω が実際に非退化であること、および、 ω の具体的な形については、やはり座標で

$$d\theta = dp_i \wedge dx^i$$

という具合に計算するのが楽であろう。)

2.2. T^*M のシンプレクティック構造と微分作用素の交換関係との関係. 微分作用素の環は (微分作用素としての) 階数によってフィルターづけされる。

$$Diff(M) = \sum_n Diff_n(M).$$

このフィルターづけされた環の "Gr" をとったのが T^*M 上の関数環である。 n 階の微分作用素 $D \in Diff_n(M)$ が代表する $Gr_n(Diff(M))$ の元を $(D)_n$ と書くことにする。

$Diff(M)$ のフィルトレーションは次のような特徴をもつ。

$$[Diff_n(M), Diff_m(M)] \subset Diff_{n+m-1}(M)$$

その結果、 $Gr(Diff(M))$ には「一つ次数がずれた」ブラケットが定義される。

$$\{(D)_n, (D')_m\} = ([D, D'])_{n+m-1}$$

このブラケットが、前節で定義された T^*M のシンプレクティック構造に対応したポアソン括弧である。

この対応から学ぶべきものはたくさんあるが、それはおいおいで来るので、ここではこのぐらいにとどめて先に進むことにする。

3. 複素射影空間

3.1. 複素射影空間のケーラー構造. 複素射影空間がシンプレクティック空間であり、いわゆるケーラー多様体の例になっていることはよく知られている。ここでは簡単にその復習をしておこう。

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の上のシンプレクティック計量 (ケーラー計量) を導入するには、ちょっと思い付くだけでも、

- (1) シュワルツの不等式から形式的に導く方法
- (2) $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ のシンプレクティック商空間とみる方法
- (3) 幾何学的直観を元にした方法

が考えられる。本稿で考察するのはおもに 2. の方法であるが、他の方法についても面白いのであとで少し考えてみることにする。

3.2. Fubini-Study 計量の幾何学的な定義. この節では、Fubini-Study 計量の幾何学的な定義について振り返ってみよう。次のように、 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は S^{2n+1} の商空間と見做せる。

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) &= (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times \\ &= \{v \in \mathbb{C}^{n+1}; \|v\| = 1\}/S^1 \\ &= S^{2n+1}/S^1\end{aligned}$$

S^{2n+1} には \mathbb{C}^{n+1} から誘導された計量が入り、それは S^1 の作用で不変だから、 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の計量を定める。これが $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の Fubini-Study 計量である。

本稿では余り用いないが、Fubini-Study 計量の座標表示についても一応触れておこう。 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の複素斉次座標 z_0, z_1, \dots, z_n をとる。 \mathbb{C}^{n+1} の各点の接ベクトルを \mathbb{C}^{n+1} の元と同一視しておく。 $v \in T_p(\mathbb{C}^{n+1})$ の長さは、

$$\|v\| = \sqrt{\sum_i |v_i|^2}$$

であたえられる。 S^{2n+1} の計量を求めよう。 S^{2n+1} の点 p における \mathbb{C}^{n+1} の接ベクトル v を考える。 v を S^{2n+1} に関する接平面の成分と法線方向の成分に分解し、接平面成分の長さを求めることが必要になる。

v と p とのなす角を θ とおくと、内積に関する有名な公式

$$\langle v, p \rangle = \|v\| \cdot \|p\| \cos \theta \quad (\text{今の場合 } \|p\| = 1 \text{ だから } = \|v\| \cos \theta)$$

により、接成分の長さの二乗は、

$$(\|v\| \cdot |\sin \theta|)^2 = \|v\|^2(1 - \cos^2 \theta) = \|v\|^2 - (\Re \langle v, p \rangle)^2$$

と求めることができる。これが S^{2n+1} の計量になる。 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の計量を得るためには、ここからさらに S^1 -作用の方向の成分を引き去る必要がある。上と同様の考え方によって、

(v の、 S^{n+1} に接し、 S^1 軌道 と垂直な成分の長さ) $^2 = \|v\|^2 - |\langle v, p \rangle|^2$ と結論することができる。これが Fubini-Study 計量を与える基本である。

座標を使って表現すると、Fubini-Study 計量を与える (もととなる) S^{2n+1} 上の計量は、

$$\sum_i dz^i \bar{d}z^i - \left(\sum_i z^i \bar{d}z^i \right) \left(\sum_j \bar{z}^j dz^j \right)$$

とすることになる。

話を \mathbb{P}^n らしくするために、 $\|p\| = 1$ への制限をやめて、長さ $\|p\|$ に関して斉次な形で書くと、次のようになる。

$$\frac{1}{\left(\sum_i z^i \bar{z}^i \right)^2} \left(\sum_{ij} z^i \bar{z}^j dz^j \bar{d}z^i \right) - \left(\sum_i z^i \bar{d}z^i \right) \left(\sum_j \bar{z}^j dz^j \right)$$

これが斉次座標で表現した Fubini-Study 計量であって、非斉次座標に移るには定石通り一つの i に関して $z_i = 1, dz_i = 0$ とおいてやれば良い。詳細は読者にお任せしよう。

3.3. 余談：Fubini-Study 計量の形式的な導き方について。前小節の議論を見ると、シュバルツの不等式

$$\|v\|^2 \|p\|^2 \geq |\langle v, p \rangle|^2$$

から、形式的に $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の計量を与える方法が見えて来る。これは余り褒められた方法ではないが、計量の具体的な式を思い出すには便利かも知れない。

3.4. シンプレクティック多様体とポアソン括弧。次節以降で、 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の Fubini-Study 計量をシンプレクティック商の立場から見直したいのだが、この節ではその準備としてシンプレクティック多様体の一般論の初歩について復習しておく。

シンプレクティック多様体は非可換な object の「影」とみたいので、シンプレクティック多様体の詳細な議論はさけ、粗筋のみを追うことにする。

(M, ω) がシンプレクティック多様体であるとは、次の諸条件を満たす時にいう。

- (1) M は実 C^∞ 多様体である。
- (2) $\omega \in \Gamma_{C^\infty}(\Omega^2(M))$ (実 2-形式)。
- (3) $d\omega = 0$

(4) ω は非退化。

(M が非退化な ω をもつためには、 M の次元は偶数でなければならない。シンプレクティック多様体ばかりを対象として理論を作る際には、部分空間や商空間をとる時に偶数次元ずつ次元を下げなければならない。このことは、シンプレクティック商の必要性の最初の暗示である。)

ω により、 T^*M と TM との間の同型写像 ι が得られる。

$\iota(df)$ のことを X_f と書く。

$f, g \in C^\infty(M)$ に対して、それらのポアソン括弧は、

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = X_f g = -X_g f$$

で定義される。 ω が d -closed であることから、 $(C^\infty(M), \{\})$ は Lie 代数であることが従う。さらに、

$$(C^\infty(M), \{\}) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

は Lie 代数の拡大であることがわかる。

3.5. 非可換環の「制限」。非可換環 A (unital, associative) に対して、 A が十分多くのイデアルを持つことは余り期待できない。比較的簡単に作れるのは A の片側イデアルであって、たとえば左イデアルなら A のいくつかの元 $\{a_j\}$ をとって、 $\sum_j Aa_j$ を考えれば良い。そこで、この節では A の左イデアル J ($AJ = J$) に対して、 A を J で「制限」するというを考えてみる。

まず、 J のイデアル化子 (idealizer) $N(J)$ を、

$$N(J) = \{a \in A; Ja \subset J\}$$

で定める。 J は $N(J)$ のなかではイデアルである。そこで、次のような代数を考えることができる。

$$A_J = N(J)/J$$

この A_J のことを A の J による「制限」とよぶことにする。

(例)

$$A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n], \quad J = Ax_n$$

$$\begin{aligned} N(J) &= \{a \in A; x_n a \in Ax_n\} \\ &= \{a \in A; [x_n, a] \in Ax_n\} \\ &= \{b(\partial_1, \dots, \partial_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\} + J \end{aligned}$$

$$A_J = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}, \partial_1, \dots, \partial_{n-1}]$$

上の例は、次のように説明できる。ある粒子の第 n 座標が 0 である ($x_n = 0$) ということが (例えば観測の結果) わかったとする。不確定性原理によって、そのようなときには x_n の共役運動量である p_n は全く不確定になってしまう。そこで、 p_n を放棄して、 A の代わりにその部

分代数である $N(J)$ をとり、 $N(J)$ を J で割ってしまおうというわけである。

この議論を一般化すると、環 A の $\sum_j Aa_j$ による「制限」とは、考えを $a_j = 0$ に制限するために、 a_j と同時観測可能でない変数を捨てる、ということをしていることがわかる。

上の例で、座標と微分の役割を入れ換えて考えると、実は部分環をとる操作と商環をとる操作は互いに裏腹の関係にあることがはっきりして、もう一つの面白い考え方が生じる。以下それを詳しく見てみよう。

(例 2)

$$A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n], \quad J = A\partial_n$$

$$\begin{aligned} N(J) &= \{a \in A; \partial_n a \in A\partial_n\} \\ &= \{a \in A; [\partial_n, a] \in A\partial_n\} \\ &= \{b(x_1, \dots, x_{n-1}, \partial_1, \dots, \partial_{n-1}, \partial_n)\} + J \end{aligned}$$

$$A_J = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}, \partial_1, \dots, \partial_{n-1}]$$

この例は、次のように説明できる。 A から、 x_n という変数を落として、 $N(J)$ を得ることは、考えている空間を x_n 軸に沿う「フロー」で割ることを意味しており、 A_J を J で割ることは、フローに対応する「モーメント」が一定であるとみていることになる。

この節を終える前に一つ注意をしておこう。一般に、環 A の部分環や商環を考える際には A の元が少なすぎることによる「欠陥」が生じることがあり、それを補うためにはホモロジー代数的な考察を行うのが普通である。そのことについては super 変数の導入までしばらくおいておくことにし、以下では基本的に「とてもよい」場合のみを考えることにする。

3.6. シンプレクティック 商. 前節の「制限」の操作をシンプレクティック多様体のほうでながめたのが、シンプレクティック 商 である。

Lie 群 G がシンプレクティック多様体 (M, ω) に作用し、 G の作用は ω を不変にしているとする。作用は次の様なリー環準同型を誘導する。

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

この作用の「モーメント写像」とは、この準同型の次のようなリフトのことである。

$$\mu : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$$

(μ には「積分定数」の分だけ任意性があり、それをどう決めるかは場合による。また、 G が不連結の場合には、 μ に適当な G -共変性を要求する必要がある。)

M の μ による「制限」がシンプレクティック 商 と呼ばれるものである。

$$N(J) \supset A \cdot \mu(\mathfrak{g}) + \epsilon A + \{a_1 \in C^\infty(M) \mid \mathfrak{g} \cdot a_1 = 0\}$$

$$M//G = \mu^{-1}(0)/G$$

3.7. \mathbb{P}^n with Fubini-Study 計量を $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, \text{standard 計量})$ の商と見る。 $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, \text{standard 計量})$ には S^1 が作用している。Lie 環の作用を $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ の実座標系 $(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ を使って表現すると、

$$\theta \mapsto \theta \sum_i \left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = X_\mu$$

となり、モーメント写像は、

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_i (x_i^2 + y_i^2)$$

で与えれば良いことがわかる。

μ の各 fiber は $2n+1$ 次元球面であり、それを S^1 で割れば 1. 節のものと同じ $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ を得ることになる。

良く知られているように、複素多様体においては、メトリックとシンプレクティック形式がうまく対応づけられることがある。(このような多様体をケーラー多様体と呼ぶ。) ケーラー多様体にリー群が作用していて、その作用が複素構造およびシンプレクティック構造を保つなら、そのシンプレクティック商もケーラー多様体であることがわかる。今の例はその典型であって、それを用いて $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ はケーラー多様体であり、計量が定まることがわかる。それが Fubini-Study 計量である。

3.8. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の非可換実変型:環 A_R . いよいよ $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の実変形について考えてみよう。

$$A = \mathbb{C}[z_0, z_1, \dots, z_n, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n]$$

とする。ただし、こんどは z_i, \bar{z}_j は必ずしも可換ではなくて、

$$[z_i z_j] = 0, \quad [\bar{z}_i \bar{z}_j] = 0, \quad [z_i \bar{z}_j] = \delta_{ij}$$

を満たすものとする。ここに、 $[xy] = xy - yx$, δ_{ij} はクロネッカのデルタである。表題のものをえるには、この A を、

$$\mu = \sum_i z_i \bar{z}_i - R$$

で制限すれば良い。(前節で求めた μ と少し変えてある。 μ を 2 倍したのは全く便宜上の問題であり、積分定数 R を付け加えたのは $R=0$ が singular な場所だからである。) すなわち、 A を次のようなイデアルで「制限」することになる。

$$J = A\mu$$

$N(J)$ の具体的な形をもとめよう。 A には $\deg(z_1) = 1, \deg(z_j) = -1$ として次数づけが入る。この次数づけに関して斉次な元 f に対して、

$$[\mu, f] = \deg(f)f$$

この関係式を用いると、直ちに、

$$N(J) = A_0 + J \quad A_0 \text{ は } A \text{ の次数 } 0 \text{ の元全体のなす代数}$$

がわかる。すなわち、

$$N(J)/J = A_0/(A_0 \cap J) = \mathbb{C}[\{z_i \bar{z}_j\}_{i,j}] / \left(\sum_j z_j \bar{z}_j - R \right)$$

この環を A_R と書くことにする。次の節でこの環の $*$ -表現について詳しく調べることにしよう。

4. 環 A_R の $*$ -表現

この節では、

$$A_R = \mathbb{C}[\{z_i \bar{z}_j\}_{i,j}] / \left(\sum_j z_j \bar{z}_j - R \right) \quad (\mathbb{R} \text{ は正の実数})$$

の $*$ -表現を決定する。結果は、実に簡単である。

定理 4.1. A_R のヒルベルト空間への $*$ -表現で、0 でないものがあつたとする。このとき、 R は正の整数である。さらに、このとき、 A_R の任意の表現はつぎのような特別な一つの表現 H_R の何個かの直和 (いいかえると、 H_R と単なるベクトル空間とのテンソル積) である。

- H_R の有限次元であつて、その次元 K は $(R+n)!/n!R!$ に等しい。
- この表現から決まる自然な $*$ -準同型 $A_R \rightarrow \mathbb{B}(H_R) \cong M_K(\mathbb{C})$ は全射である。

この定理の系として、 A_R の包絡 C^* 環が計算できる。

系 4.1. A_R の C^* -包絡環を $C^*(A_R)$ と書くことにすると、

$$C^*(A_R) = \begin{cases} M_K(\mathbb{C}) & (R \text{ が整数の時}; K = (R+n)!/n!R!) \\ 0 & (R \text{ が整数でない時}) \end{cases}$$

次の小節以降で証明の概略を述べよう。なお、この節全体を通じて、 δ はクロネッカのデルタをさす。

4.1. 環 A_R の生成元の満たす関係式. 以下、 A_R の表現の一つをとって、 H と書くことにする。 $H = 0$ では面白くないので、以下 $H \neq 0$ とする。

まず、

$$e_{ij} = z_i \bar{z}_j$$

とおくと、 e_{ij} は以下のような交換関係を満たす。 e_{ij} は次のような関係式を持つ。

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{kj}$$

$$(e_{ij} + \delta_{ij}) e_{kl} = (e_{kj} + \delta_{kj}) e_{il} \quad (\text{Plücker の関係式の非可換版に相当})$$

$$\sum_{i=0}^n e_{ii} = R$$

$$e_{ij}^* = e_{ji}$$

とくに、最初の交換関係は $GL_n(\mathbb{C})$ の Lie 環 $gl_n(\mathbb{C})$ の交換関係と同じである。言い替えると、

$$(gl_n(\mathbb{C}) \text{ の普遍展開環}) \rightarrow A_R$$

なる全射環準同型が存在する。

したがって、 H は、 $gl_n(\mathbb{R})$ の表現であって、上述の関係式を満たすものである。

Lie 環の表現を良くご存知の方にとってはここまでで十分のような気もするが、次の小節以降少し続けてみよう。

4.2. e_{ii} の正值性の確認. A_R の $*$ 表現を考えるにあたって、もともと、環 A においては $e_{ii} = z_i \bar{z}_i \geq 0$ であるから、気分的には e_{ii} は正であることを仮定しても良いような気もする。しかしこのことはわざわざ仮定しなくても必然的に出て来る。この小節ではそのことを説明しよう。

$$0 \leq e_{ij} e_{ij}^* = e_{ii} (1 + e_{jj})$$

だから、 H は二つのヒルベルト空間の直和である。

$$H = H^+ \oplus H^-$$

H^+ 上では、 $\{e_{ii}\}_{i=0}^n$ はそのことごとくが正值であり、 H^- 上では、 $\{e_{ii}\}_{i=0}^n$ はそのことごとくが -1 以下の作用素である。

$$\sum_{i=0}^n e_{ii} = R > 0$$

と仮定したから、今の場合には $H^- = 0$ 。すなわち、 H 上で $e_{ii} \geq 0$ である。

注意

本題からは外れるが、 $R < 0$ のときは逆に $e_{ii} \leq -1$ である。このときには

$$A_R \ni e_{ij} \mapsto -(\delta_{ij} + e_{ji}) \in A_{(-R)}$$

なる同型の存在によって、 $R > 0$ の場合に帰着できる。

4.3. 有界性.

$$\sum e_{ii} = R, e_{ij}e_{ij}^* = e_{ii}(1 + e_{jj})$$

という関係式から、 e_{ii}, e_{ij} という作用素が全て有界であることがわかる。

4.4. 《最高ウエイトベクトル》の存在. まず、互いに可換な自己共役元 $\{e_{ii}\}_{i=0}^n$ で生成される H 上の (可換) フォンノイマン環を考え、その中のうまい射影 $p (\neq 0)$ をとることにより、 $V = pH$ の元 v にたいし、

$$i < j \text{ ならば } e_{ij}v = 0$$

が成り立つようにできる。さらに、これらの v に対して、

$$e_{i0}v = 0 \text{ ゆえ } (1 + e_{00})e_{ii}v = e_{i0}e_{0i}v = 0 \quad (\text{for } i > 0)$$

$1 + e_{00} \geq 1$ だから、 $(1 + e_{00})$ は可逆であるということに注意すると、

$$e_{ii}v = 0 \quad (\text{for } i > 0) \text{ ゆえに } e_{00} = R$$

がなりたつ。すなわち、 A_R の表現では、《最高ウエイトベクトル》が常に存在する。さらに、各 e_{ii} の有界性から、

$$e_{ij}^l v = 0 (\text{for } v \in V, i > j, l \gg 0)$$

がわかり、リー環の表現論の定石に従って R の整数性が導かれる。 A_R の関係式から、 H が《水増し》(同じもののいくつかの直和) の違いを除いて一意に定まることはかなりやさしい。

4.5. A_R の $*$ -表現 H_R の正体. この節では、 H_R を実際に構成し、その次元を計算しよう。多項式環 $P = \mathbb{C}[z_0, z_1, \dots, z_n]$ に、次のような内積をいれる。

$$\langle z^\alpha, z^\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta} \alpha_0! \cdots \alpha_n!$$

(α, β にはマルチインデックスを使用している。 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ である。)

この内積にかんし、 z_i と d/dz_i とは互いに共役になる。とくに、 P の次数 d の斉次部分 P_d をとると、これは $\{z_i d/dz_j\}$ の作用に関して不変である。 $d = R$ とし、 e_{ij} に $\{z_i d/dz_j\}$ を対応させれば、 P_d が H_R の具体的な表示を与えていることがわかる。(たとえば、 P_d の既約性は最高ウエイトベクトルの空間が一次元しかないことからわかる。)

P_d の次元を求めるのは、高校生レベルの練習問題である。

4.6. 《半径》(の二乗) R について. A_R の《 R 》はもちろん非可換化された $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の大きさをあらわす数であり、それが前小節までに見た通りとびとびの値をとるのは如何にも量子力学的である。

可換理論では R は補助的役割しか果たさなかったことを思い出そう。つまり、 R を如何なる値にとろうとも、最終的な答えは (e_{ij} を e_{ij}/R で置き換えることにより) 同じものになってしまう。

それに対して、非可換理論においては、 R は役割を背負った、消去できないパラメータとして登場している。これは R の大きさが z_i と \bar{z}_j との交換関係

$$[\bar{z}_j, z_i] = \delta_{ji}$$

の右辺の大きさである 1 と比較されるためである。

R の値が大きい状況とは不確定性が無視できる状況であるということが出来る。

e_{ij}/R を a_{ij} と書き直し、 $1/R$ を h とおくと、 A_R は次のような関係式を満たす a_{ij} で生成された環であると定義することもできる。

$$\begin{aligned} [a_{ij}, a_{kl}] &= (\delta_{jk}a_{il} - \delta_{il}a_{kj})h \\ (a_{ij} + \delta_{ij}h)a_{kl} &= (a_{kj} + \delta_{kj}h)a_{il} \\ \sum_{i=0}^n a_{ii} &= 1 \\ a_{ij}^* &= a_{ji} \end{aligned}$$

このかたちで与えた方が、 $h \rightarrow 0$ の《極限》でこの環が可換であるなどという言いかたができて、好まれるかも知れない。

ともかく、前小節で述べたことにより、 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の上の関数環が行列環で《近似》できたことになる。

これは面白い現象だと思われる。この現象については、また立ち戻って調べることになるだろう。

4.7. 環 A_R の *-表現 H_R の正体 II. 前々節の例は次のように理解することもできる。

$A = \mathbb{C}[z_i, \bar{z}_j]$ を、 $H = L^2(R^{n+1})$ への *-表現 Φ を、

$$\Phi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i - d/dx_i), \quad \Phi(\bar{z}_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + d/dx_i)$$

で定義する。(実は、かなりゆるい条件のもとで、 S の *-表現はこのようなもの(のいくつかの直和)しかないことを示すことができる。)

$T = \sum_i z_i \bar{z}_i$ は H 上の正值な作用素である。 T の固有関数を考えよう。各 multi-index α に対して次のような H の元を考える。(これは、

定数倍を除いて $\Phi(z^\alpha)e^{-x^2/2}$ に一致する。)

$$\phi_\alpha = H_\alpha(x)e^{-x^2/2}$$

ここに、 H_α は、エルミート多項式

$$H_\alpha(x) = e^{x^2}(d/dx)^\alpha(e^{-x^2})$$

である。すると、各 ϕ_α は、 T の $|\alpha|$ に属する固有ベクトルであり、かつ、 $\{\phi_\alpha\}$ はヒルベルト空間 H の直交基底をなすことがわかる。

$N(J)$ は T の各固有空間を保つことから、 $N(J)$ の表現をそれらの固有空間上に実現することができる。これが A_R の表現 H_R の正体である。

このように考えてみると、 A_R の表現は A の表現から誘導されたものしかないということになる。これでは如何にもつまらないのだが、この問題については次の機会に考えることにする。

5. *-表現以外の環 A_R の表現

前節で、 A_R の C^* -包絡環を調べてみたが、その結果は有限次元の行列環が出て来ただけで、少し面白みに欠けていた。

しかし、 R が非整数であっても A_R 自体は非自明な環であり、ある線形空間上に非常に明解な表現を持っている。(ただし、もちろんその表現は *-表現ではない。) この節ではそのことを示そう。

5.1. 表現の構成. * のことを忘れると、 $A = \mathbb{C}[z_i, \bar{z}_j]$ の表現には4.7 節で述べたものよりも「安直」なとり方がある。すなわち、

$$\Phi(z_i) = x_i, \quad \Phi(\bar{z}_i) = d/dx_i$$

で定義される $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ 上の表現である。話を L^2 -空間の上でもできるが、無理にそうしても今のところ益は少ないので、ここでは作用素の定義域の問題を避けるためにこの空間上で話を進める。)

この表現のもとでは、 $\sum_i z_i \bar{z}_i$ は「オイラー作用素」、すなわち、関数の「次数」を表す作用素であることに注意すると、 A_R の表現空間として次のようなものを得る。

$$W_R = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}); \\ f(\lambda x) = \lambda^R f(x) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})\}$$

もちろん $z_i \bar{z}_j$ は $x_i d/dx_j$ に対応させるわけである。

上の式で、generic な R に対して λ^R を一意的に定めるために λ が正の実数であることを利用している点に注意する。これが、関数空間として $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 上のものではなく \mathbb{R}^n 上のものを使っている理由である。さらに、 $R \mapsto \lambda^R$ は多項式関数ではない。これらのことが話の代数化をすこしく困難にしている。

5.2. R が正の整数の時. R が正の整数の時には、前小節の最後で述べたことは事情が違ってくる。このときには λ^R は λ の多項式であり、任意の環の元 λ に対して一意に定義することができる。

W_R の部分空間として、 $\{x_i\}$ の d -次斉次多項式全体のなすベクトル空間がある。これが基本的には前節で述べた A_R の表現 H_R である。

H_R は、 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の上のラインバンドル $\mathcal{O}(R)$ のグローバルセクションの全体と同一視することができることにも注意しておこう。これで話の出発点である $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ と A_R とを結びつけることができた。

5.3. 微分作用素の層との関係. 前小節の最後で、 $\mathcal{O}(R)$ と H_R との関係が出て来た。 $C^*(A_R)$ は $\mathcal{O}(R)$ 上の微分作用素のなす層 $\mathcal{D}_{\mathcal{O}(R)}$ のグローバルセクションと見做すこともできる。(ただし、 $*$ -構造は今しばらく忘れておく必要がある。) もちろん、 $\mathcal{O}(R)$ がラインバンドルとして意味をなすためには R は整数でなければならない。しかし $\mathcal{D}_R = \mathcal{D}_{\mathcal{O}(R)}$ を $\mathcal{O}(R)$ への作用を忘れて) 単なる環の層として眺めてみると、実はこれは R が任意の実数でも定義をすることができることが知られている。([1] [2]) 一般の実数 R に対して、「 R -次斉次な regular な関数」は存在しないのだが、 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上で analytic topology について local には $\mathcal{O}(R)$ の元にあたるものが存在する。それに対する微分作用素を $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ におろして来たのが \mathcal{D}_R だと見ることができる。

このことを考えると、《 A_R は $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上のグローバルなオブジェクトとしては捉えられないが、 \mathcal{D}_R がその類似物を提供している》と見ることにもできる。次の小節でこの点について少し補足することにしておこう。

(ただし $*$ に関する対称性から見ればこの見方が完全に満足のいく見方とは言いがたい。むしろ、 $*$ に対する A_R の対称性は、 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の特定の加群の層に対して、双対性 (Fourier 変換にあたる) を定義していると見ることにもできる。)

5.4. 環 A_R の表現と \mathcal{D}_R -加群との対応. 結論から先に述べよう。次の定理が成り立つ。

定理 5.1. R を複素数とし、

$$A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n], \mu = \sum_i x_i \partial_i - RJ = A\mu, A_R = N(J)/J$$

とおく。次のようなカテゴリーを考えよう。

$$\mathcal{C}_1 = \{\text{graded } A\text{-module } M \text{ with } \mu_{M_0} = 0\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{A_R\text{-module}\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{\mathcal{O}\text{-quasi-coherent } \mathcal{D}_R\text{-module on } \mathbb{P}^n(\mathbb{C})\}$$

このとき、

- (1) R が整数でなければ、上の三つのカテゴリーは同値である。

(2) R が 0 以上の整数ならば、 C_2 と C_3 とは同値である。

なお、 R が 0 以下の整数の時については上の定理は言及していないが、その時どのようなことが起こっているかは、以下の解説を見れば大体想像がつくと思う。さらに必要なら A_R と A_{n-R} との同型を使えば、もっと詳しく述べることもできる。

さて、定理の証明のためには、次の補題を証明すればいい。

補題 5.1. 上の定理と同じ記号を使う。次の等式が成り立つ。

$$\text{Ob}(\mathcal{C}_2) = \{M_0; M \in \text{Ob } C_1\}$$

$$\text{Ob}(\mathcal{C}_3) = \{M \text{ の尻尾}; M \in \text{Ob } C_2\}$$

ただし、*graded module* M の尻尾とは、 M の、「次数の低い部分の差異を無視した」ものである。要は M (を $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ -module と見做したもの) に対応する $(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の層の構成でおなじみのものである。)

この補題の後半は、代数幾何学ではおなじみである。前半の証明のキーになるのは、次の事実である。

(事実 1) A_R -module N を考えよう。 N は $N(J)$ -module とみなせることに注意する。そこで、 $M = A \otimes_{N(J)} N$ を考えると、 M は *graded* A -module であって、 $M_0 \cong N$ および $(\mu - R - i) \cdot M_i = 0$ をみtas。

(事実 2) *graded* A -module M が、ある整数 i にたいして $M_i = 0$ をみtasとすれば、 $z_j \cdot M_{i+1} = 0$ ($j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$)。ゆえに、 $\mu \cdot M_{i+1} = 0$ となる。

上の定理の系として、次の事がわかる。

系 5.1. $r \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ のとき、 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の \mathcal{O} -quasi coherent \mathcal{D}_R -module M に A_R -module $\Gamma(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), M)$ を対応させる関手はカテゴリーの同値を与える。

$R = 0$ の時にはこの系は《 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の \mathcal{D} -アファイン性》として知られるものである。たとえば [3] の Chapter I section 6 を参照のこと。

R が一般の時も含めて、この小節の結果よりもっと一般的な結果 (《リー環の表現》と《旗多様体上の twisted differential operators の層上の加群》との対応) が [1] で述べられている。([4] に日本語の解説がある。)

6. 結語

この稿では、シンプレクティック多様体とその非可換な方向への「変型」について、その概要を述べ、さらに「シンプレクティック商」とそ

の量子化の考えを用いて $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の「非可換実変型」がどのように取り扱われるかを見た。

ここで扱った例は後々現れる現象の考察の拠り所として用いることになるだろう。

REFERENCES

- [1] A. Beilinson and J. Bernstein, *Localisation de \mathfrak{g} -modules*, C.R. Acad.Sci. Paris **292** (1981), 15–18.
- [2] A. A. Beilinson and V. V. Schechtman, *Determinant bundles and Virasoro algebras*, Commun. Math. Phys. **118** (1988), 651–701.
- [3] Ryoshi Hotta, *Introduction to D-modules*, Institute of Mathematical Sciences, 1987.
- [4] 堀田良之 谷崎俊之, *D加群と代数群*, シュプリンガーフェアラーク東京, 1995.