2016/12/17 の資料その1

Contents

この「資料」はまとまっているものではありません。土基がしゃべる際に適切な部分を選べば多少は役に立つかと思って作られたものです。

本話題に関する土基が以前に作ったいくつかの文には、舌足らずだったり、間違っている部分がありますので、それについて疑問が生じた場合には、この資料が役に立つ場合もたまにはあるかもしれません。その程度のものです。

CHAPTER 1

アウトライン (未完成)

1. プロトタイプ

プロトタイプ (super でないバージョン) については 以前に書いた広島大での発表

http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/TALK/kaehler3/kaehler3.pdf

を参照のこと。

ultra filter の項、(form の部分を除く) 定義の部分については申し分ない。ただし Auslander regular ところ以降は再考の余地がある。

degree $= p$ の元で 生成される環 A の proj が必要。

もちろん、 Mumford の GIT 的な考え方で処理できるわけだが、そんな大げさなことをしては恥ずかしい。"本文" の note on proj を参照のこと。

1.1. $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^{(p)}$, $*$. $\mathcal{O}^{(p)}$ は $\mathrm{Proj}(Z)$ の通常の意味の structure sheaf であり、$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ と $\mathcal{O}_{\bar{\mathbb{P}}^n}$ は いずれも normal ordering のもとに $\mathcal{A}$ の subsheaf と考えることができる。$\mathcal{A}$ のなかでの $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ と $\mathcal{O}_{\bar{\mathbb{P}}^n}$ の交換関係は通常の可換なものではない。これを $*$ と書けば、

$$\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} * \mathcal{O}_{\bar{\mathbb{P}}^n}$$

である。

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{O}$ の linear な構造は同じであるから、

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{\mathbb{P}}^n}$$

が言える。(tensor 積は base ring であるところの $\Bbbk_1$.

2. A の生成元と関係式について

A の生成元は比較的簡単にわかるが、関係式はどのように求めればよいのだろうか。

まず $\mathrm{WC}_{(0)}$ について考えよう。実は normal ordering と交換関係の間の関係を考えればよい。

Weyl 環、Clifford 代数は normal ordering を導入することができる。それらの環の任意の元を normal ordering まで持ってくるだけの関係式を持ってくれば、環の関係式として必要なものが得られるわけである。交換関係、つまり 2 つの式の順序を入れ替えるときに何が生

じるかの関係、は normal ordering に持って行くにはもってこいの考えやすい関係であるから、normal ordering と 交換関係とは仲が良い。

$(WC)_{(0)}$ の生成元は

$$X_{i\bar{j}} = X_i\bar{X}_j, \quad \Xi_{i\bar{j}} = X_i\bar{E}_j, \quad \overline{\Xi_{j\bar{i}}} = E_i\bar{X}_j, \quad E_{i\bar{j}} = E_i\bar{E}_j$$

であたえられ、$WC_{(0)}$ の交換関係を担保するためには, Weyl 環だけで言えば、

$$X_{i\bar{j}}X_{k\bar{l}} - C\delta_{jk}X_{i\bar{l}} (= X_iX_kX_{\bar{j}}X_{\bar{l}})$$

が $(i\ k)$ および $(j\ l)$ という置換に関して対称であれば良い。Weyl-Clifford 環では $X_{i\bar{j}}$ のほかに $\Xi_{i\bar{j}}, E_{i\bar{j}}$ が増えるので、可能性を網羅して全部の交換関係を書き上げるのは大変だが、考え方は同じである。

A^{pre} は $\mathrm{WC}_{(0)}$ に 関係式 $\mu_1 = 0$ を付け加えただけだから生成元と関係式は易しい。A は、 A に $m = \frac{1}{k}\sum_i E_i\bar{E}_i$ を付け加えたものを $A^{\mathrm{pre}}[1/k]$ で考えればよいわけである。m が必要なことはすぐにわかるし、 $A^{\mathrm{pre}}[1/k]$ の subalgebra として考えておけば k-torsion がないのも当然である。

m と E たちの関係式をすべて具体的に書き上げるのは面倒だが、これだけわかっていれば対処できるだろう。

3. A と Ω

3.1. Z. Z に関しては本文を参照のこと。

3.2. relative Frobenius について。. 標数 p の環 $\Bbbk$ 上の多項式環 $\Bbbk[X]$ について、$X \mapsto X^p$ で定まる relative frobenius map を考えよう

$$\begin{array}{ccc} \Bbbk[X] & \xrightarrow[\text{Frob}]{} & \Bbbk[X] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Bbbk & = & \Bbbk \end{array}$$

像 $\mathrm{Frob}(\Bbbk[X])$ を 上の図式の $\Bbbk[X]$ と同一視すると、

$$\begin{array}{ccc} \Bbbk[X^p] & \longrightarrow & \Bbbk[X] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Bbbk & = & \Bbbk \end{array}$$

なる図式を得る。Spec を採ると:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\Bbbk[X^p]) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(\Bbbk[X]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\Bbbk) & = & \mathrm{Spec}(\Bbbk). \end{array}$$

下の引用で言えば、$\mathrm{Spec}(\Bbbk[X^p])$ を $\mathrm{Spec}(\Bbbk[X])^{(p)}$ と書いていることになる。(Illusie の記号) 上の図式は下のひとつ目の図式の右半分と同じものである。

私の paper “reflexive” より引用:

3.3. A note on a Frobenius map. Before explaining further, we give some note on a Frobenius map and fix some notations. Let $Y = \mathrm{Spec}(k)$ be a base scheme, $X = \mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(k[\gamma_1^p, \dots, \gamma_{2n}^p])$ be an affine space over it. In a paper of Illusie [**?**], there is given a definition of relative Frobenius map (in a more general setting–we make use of a very special case of his). The definition may be summarized in the following diagram.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & X^{(p)} = F_Y^* X \arrow[l] \arrow[d] & X \arrow[l, "F_{X/Y}"'] \arrow[d] \\ Y & Y \arrow[l, "F_Y"'] \arrow[r, equal] & Y \end{tikzcd}$$

Since we have assumed k to be a perfect field, the Frobenius map $F_Y : Y \to Y$ is invertible. So we may pull back the right square of the diagram above by F_Y^{-1} and obtain the following commutative diagram.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & (F_Y^{-1})^* X = X^{(1/p)} \arrow[l, "\overline{F}_{X/Y}"'] \arrow[d] \\ Y \arrow[r, equal] & Y \end{tikzcd}$$

where $\overline{F}_{X/Y} = (F_Y^{-1})^*(F_{X/Y})$. On the other hand, $F_{X/Y}$ gives rise to a bijection between the base spaces X and $X^{(p)}$. Thus we see that $\overline{F_{X/Y}}$ gives rise to a bijection

$$|\overline{F_{X/Y}}| : |X^{(1/p)}| \to |X|$$

between the base spaces. We will therefore identify these two spaces and regard quasi coherent sheaves on X and $X^{(1/p)}$ as sheaves on the same base space $|X|$. The structure sheaf of $X^{(1/p)}$ will then be denoted as $\mathcal{O}^{(1/p)}$. The structure sheaf $\mathcal{O}$ on X may be identified with a subsheaf of $\mathcal{O}^{(1/p)}$ via the pullback homomorphism $\overline{F}_{X/Y}^*$.

$(1/p)$ なる 面倒な記号を使う代わりに、A の subalgebra Z を、

$$Z = \Bbbk[X_0^p, \dots, X_n^p, \bar{X}_0^n, \dots, \bar{X}_n^p]$$

で定義し、その $(1/p)$ 乗を S と書くことにする。つまり、 S は

$$S^{(p)} = Z$$

を満たすような algebra である。Proj(S) と Proj(Z) は同相であるから、それによって 2 つを同一視し、$\tilde{S}$ と $\tilde{Z}$ をその上の sheaf として定義する。$\tilde{S}$ のことを $\mathcal{O}$ と書き、$\tilde{Z}$ のことを $\mathcal{O}^{(p)}$ と書けば良いだろう。

4. $\Omega^\bullet$ と $\bar{\Omega}$ は $\mathcal{A}$ の部分層と見ることができる

A (正確には、sheaf $\mathcal{A}$) の中に $\Omega^\bullet$ や $\bar{\Omega}^\bullet$ が入ることについて。

$j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ を固定する。$\{X_j \neq 0\}$ において、次の元は $\mathcal{A}$ の section と考えられる。

$$\partial(X_j^{-1}X_i) = X_j^{-1}\partial X_i - X_j^{-2}X_i\partial X_j$$

$\{X_j^{-1}X_i, \partial(X_j^{-1}X_i); i = 0, 1, 2, \ldots, n, i \neq j\}$ で生成される algebra は $\Omega^\bullet$ で、その貼り合わせ関数もまさしく $\Omega^\bullet$ である。$\bar{\Omega}^\bullet$ も同様。

ただし、両方をいっぺんに考えた $\Omega^\bullet \boxtimes \bar{\Omega}^\bullet$ と $\mathcal{A}$ とは 交換関係が異なるので注意が必要。

$$\begin{aligned}[X_j, f] &= -\frac{1}{k}[\bar{\partial}E_j, f] \\ &= -\bar{\partial}[\frac{1}{k}E_j, f] - [\frac{1}{k}E_j, \bar{\partial}f]\end{aligned}$$

ad$(\frac{1}{k}E_j)$ は $\Omega^\bullet \cdot \bar{\Omega}^\bullet$ 上の operator として well defined. (m に作用させるとはみ出す。)

全く同様に、$U^\heartsuit$ において、

$$[x_j, f] = -\bar{\partial}[\frac{1}{k}e_j, f] - [\frac{1}{k}e_j, \bar{\partial}f]$$

ad$(\frac{1}{k}e_j)$ は $\Omega^\bullet \cdot \bar{\Omega}^\bullet$ 上の operator として well defined. (m に作用させるとはみ出す。)

$$\begin{aligned}&[\partial x_i, (x'_j)^{p-1}\bar{\partial}x'_j] \\ =&\partial[x_i, (x'_j)^{p-1}\bar{\partial}x'_j] - [x_i, \partial((x'_j)^{p-1}\bar{\partial}x'_j)] \\ =&\partial(\bar{\partial}\text{-exacts}) - [x_i, \partial((x'_j)^{p-1}\bar{\partial}x'_j)] \\ \equiv&-[x_i, \partial((x'_j)^{p-1}\bar{\partial}x'_j)] \qquad (\text{mod } \bar{\partial}\text{-exacts}) \\ =&-[x_i, \partial\frac{1}{p}\bar{\partial}((\widehat{x'_j})^p\bar{\partial}x'_j)] \\ =&[x_i, \bar{\partial}\frac{1}{p}\partial((\widehat{x'_j})^p\bar{\partial}x'_j)] \\ =&[x_i, \bar{\partial}((x'_j)^{p-1}\partial x'_J)]\end{aligned}$$

戦略: まず $\{\partial x_j, (x'_j)^{p-1}\bar{\partial}x'_j\}_{j=1}^n$ はsuper commutative mod $\bar{\partial}$-exacts.

x_j を付け加えても ok. bar の世界には Lie 微分として作用するし、x_j たちと ∂x_j たちとはもともと可換だからだいじょうぶ。

最後に、中心である元 $(x'_j)^p$ を付け加えてもだいじょうぶ。

結論: A の中で $\Omega\cdot\bar{\Omega}$ は super 可換ではない (どころか積について閉じない) が、A と 導来同値な奴の部分複体とみて、A の cup 積を持ってくれば積について閉じていて、super 可換。

5. 元 b_i

$U_i=\{X_i\neq 0\}$ での $\mathcal{A}(1,1)$ の section b_i を

$$b_i=\epsilon-X_i^{-1}E_iC$$

で定義する。さらに、sheaf $\mathcal{S}_{00}$ を U_i 上で

$$\mathcal{S}_{00}=\mathcal{O}b_i+\Omega^1\cdot C$$

で定義する。

$$b_i-b_j=(X_j^{-1}dX_j-X_i^{-1}dX_i)C=-(x_{ij}^{-1}dx_{ij})C$$

($x_{ij}\overset{\text{def}}{=}X_iX_j^{-1}$) であるから、$\mathcal{S}_{00}$ は貼りあって $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$ 上の sheaf ($\mathcal{A}(1,1)$ の subsheaf) を定義する。

$$0\to\Omega^1\cdot C\to\mathcal{S}_{00}\to\mathcal{O}\to 0$$

は exact であって、この拡大に対応する cocyle は

$$-(x_{ij}^{-1}dx_{ij})C$$

である。

大事な sheaf は

(1) $\mathcal{S}_0=\mathcal{S}_{00}\otimes\mathcal{O}(1,1)$
(2) $\mathcal{S}=\Omega^\bullet\cdot\mathcal{S}_0+\Omega^\bullet$
(3) $\mathcal{S}\cdot\bar{\Omega}^\bullet$
(4) $\mathcal{A}_{\text{sparse}}=\mathcal{S}\cdot\bar{\Omega}^\bullet_{\text{sparse}}$

である。

6. $A^{\heartsuit}$ の構造

$$A^{\heartsuit}=B[m]+B[m]\bar{\varepsilon}+e_0B[m]+e_0B[m]\varepsilon$$

cocycle の全体の記述:

$$\left\{\frac{1}{k}\bar{\partial}(e_0x);x\in A^{\heartsuit},\bar{\partial}x=0\pmod{k}\right\}$$

置換積分 $\Longrightarrow$ $x\in B[m]$ としてよい。

$x=\sum_{s=0}^{t}f_sm^{[s]}$ と表現する。このような表現の内、m に関する degree t が最小になるように取る。

$\Longrightarrow$ $t = 0$. つまり、$x \in B$ としてよい。

7. 結論

(1) 2つの包含写像

$$(\mathcal{A}, \bar{\partial}) \supset (\mathcal{S} \otimes \bar{\mathcal{S}}, \bar{\partial}) \supset (\mathcal{S} \otimes \overline{\mathcal{S}_{\mathrm{sparse}}}, 0)$$

はともに quasi isomorphism である。

(2) ∂ は 上の quasi isomorphism を保つような それぞれの複体の endomorphism を与える。

$$((\mathcal{A}, \bar{\partial}), \partial) \supset ((\mathcal{S}_{\mathrm{sparse}} \otimes \overline{\mathcal{S}_{\mathrm{sparse}}}, 0))$$

は $\partial, \bar{\partial}$)-cohomology の isomorphism を与える。

CHAPTER 2

やらなくてはならない考察。

1. proj について

$\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{n+1}/\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ を Git によって解釈できる。つまり、Git の扱える枠内、範疇である。$\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{n+1}/(c, c^{-1}; c \in \mathbb{G}_m)$ とまず割ってから、さらに $\mathbb{G}_m$ で割ればよい。はじめの商も closed action ではないので、geometric quotient ではない。が、大事な部分は geometric quotient になっている。(Mumford GIT の p. 30 (Chapter 1, §.2), p. 36 (Chapter 1,§.4) あたりを参照のこと。)

2. torsion について考えてみた

local に k-torsion で割るのと射影座標環で k-torsion でわるのは同じである。

そのことをみるために、homogenous な module M に対して、local なところでの $M^{\heartsuit}$ とを比較してみよう。

$M^{\heartsuit}$ の元 m_1 は

$$m_1 = X_0^{-pN} m \quad (\exists m \in M \text{ (homogeneous)})$$

と書ける。いま、仮に m_1 が k-torsion とすると、

$$km_1 = 0 \quad \text{ in } M^{\heartsuit}.$$

このことから、

$$\exists N_1 \quad \text{ such that } X_0^{pN_1} km = 0 \text{ in } M$$

つまり、$X_0^{pN_1} m$ は M の k-torsion である。

$$m_1 = X_0^{-p(N_1+N_0)}(X_0^{pN_1} m)$$

なので、m_1 は M の k-torsion を X_0^p の冪で割ったものである。よって、

$$({}_kM)^{\heartsuit} = {}_k(M^{\heartsuit}).$$

さて、graded module に, それに associate する sheaf を対応させる対応 $M \mapsto \tilde{M}$ は exact である。(Hartshorn とかにもある。) から、冒頭に述べたことが言えた。

$(A^{\mathrm{pre}})^{\heartsuit} = (\mathrm{WC}_{(0)}/(\mu_R))^{\heartsuit}$ の生成元と relation を求めるのは易しい。上の議論により、その k-torsion を切ったものが $A^{\heartsuit}$ である。

$\mathrm{Cliff}_1^{h,C,k} \otimes \mathrm{WC}_n^{h,C}$ を考え、それに $\frac{1}{k}$ を付け加えた環の中で、$\mathrm{Cliff}_1^{h,C,k} \otimes \mathrm{WC}_n^{h,C}$ と $m = \sum_{i=0} e_i e'_i$ とで生成される環を考える。この環は $\frac{1}{k}$ を付け加えた環のなかで考えているから当然 torsion を切ったものになっていて、生成元と relation が一致する。よって、

$$A^{\heartsuit} \cong \mathrm{Cliff}_1^{h,C,k} \otimes \mathrm{WC}_n^{h,C} .$$

もっと細かく言うと、x, x', e, e', m が $\mathrm{Cliff}_1 \otimes \mathrm{WC}_n$ の関係式をすべて満たすのは容易にわかる。

逆に、x, xY, e, e', m が $\mathrm{Cliff}_1 \otimes \mathrm{WC}_n$ の関係式をすべて満たすとき、$X_i\overline{X_j} = x_i x'_j$, $X_i\overline{E_j} = x_i e'_j$, $E_i\overline{X_j} = e_i x'_j$, $E_i\overline{E_j} = e_i e'_j$, は $WC_{(0)}$ の関係式をすべて満たす。

Weyl-Clifford 代数の $\Bbbk$ 上の basis:

$$h^t k^u X^I \bar{X}^J E^K \bar{E}^L C^s$$

module としては、WC は多項式環 $\Bbbk[h, k, C]$ 上

$$\{X^I \bar{X}^J E^K \bar{E}^L; I, J \in \mathbb{N}^{n+1}, K, L \in \mathbb{N}_p^{n+1}\}$$

を free basis とした free module である。

$WC_{(0)}$ の生成元は

$$X_{i\bar{j}} = X_i \bar{X}_j, \quad \Xi_{i\bar{j}} = X_i \bar{E}_j, \quad \bar{\Xi}_{i\bar{j}} = \bar{X}_j E_i, \quad E_{i\bar{j}} = E_i \bar{E}_j$$

で、これの交換関係は $\mathfrak{gl}$ 的な奴と Plücker 関係式的な奴である。なぜかを説明しよう。それらの関係式を満たす環を仮に

$$WC_{(0)}^{(\mathrm{I})}$$

とおく。

$$WC_{(0)}^{(\mathrm{I})} \to WC_{(0)}$$

は well-defined な surjection であり、$WC_{(0)}^{(\mathrm{I})}$ の basis の数は 多くとも $WC_{(0)}$ のものと同じ分しかない。このことから、

$$WC_{(0)}^{(\mathrm{I})} \cong WC_{(0)}$$

というわけである。

3. Ω_{sparse} etc について

Ω_{sparse} の定義。

本来、Ω_{sparse} は座標不変ではない。つまり、座標のとり方に依存する。正確には、座標のとり方のうち、Witt 環 (mod p^2) への lift のとり方に依存する。$\mathbb{P}^n$ はもちろん Witt 環まで持ち上がるから、Ω_{sparse} はうまく定義される。fdg について、f, g の Witt 環への lift f_1, g_1 をとり、$\frac{1}{p} f_1^{(p)} dg_1^{(p)}$ mod p を考えればよい。(ただし $f_1^{(p)}$ は relative に p

乗することをさす。つまり、 $(f_1)^p$ を考えて、係数の部分だけ引き戻すことを指す。)

4. $A^\heartsuit$ の構造について考えてみた

$\mathrm{WC}, \mathrm{WC}_{(0)}, A^{\mathrm{pre}}, A^\heartsuit$ の生成元と関係式の求め方。

$\mathrm{WC} = \mathrm{Weyl} \otimes \mathrm{Cliff}$ よく知られていて、問題はなかろう。normal ordering が使えることには注意。

$\mathrm{WC}_{(0)}$ の生成元 (" 我々の生成元") は比較的すぐわかる。$X_{ij} = X_i \bar{X}_j$ etc である。

それらにわれわれの relation

$$X_{ij} X_{lm} = \dots$$

があることはすぐわかる。逆に、それらがあれば任意の $\mathrm{WC}_{(0)}$ の元は normal ordering に並べ替えられ、そのことから (我々の生成元)/(我々の関係式) の次元がすでに $\mathrm{WC}_{(0)}$ の次元と等しいことがわかる。うまり、

$$(\text{我々の生成元})/(\text{我々の関係式}) \to \mathrm{WC}_{(0)}$$

は全射にして、次元の関係により、同型。よって、(我々の関係式) は十分である。

A^{pre} は生成元は同じで、関係式は与えられているので易しい。

local coordinate を使ったほうがわかりやすいだろう。X_{ij} といった中途半端な元やそれらの関係式など途中の計算を省くこともできる。

$U^\heartsuit$ での coordinate system で話そう。$\mathrm{WC}_{(0)}^\heartsuit$ の生成元は

$$x, x', e, e'$$

である。これらは Weyl 環 と Clifford 代数のテンソル積の生成元と同じ関係式を満たす。x'_0 だけは特別で、これは $\mathrm{sdeg}_\heartsuit = (x, e \text{ の数}) - (x', e' \text{ の数})$ をさす。より正確には、

$$[x'_0, f] = -\,\mathrm{sdeg}_\heartsuit(f) hCf$$

である。個別的に言うと:

$$[x'_0, x_j] = -hCx_j, \quad [x'_0, e_j] = -hCe_j, \quad [x'_0, x'_j] = hCx'_j, \quad [x'_0, e'_j] = hCe'_j.$$

WC algebras の交換関係と、上の関係から normal ordering に持っていくことができる。

$(A^{\mathrm{pre}})^\heartsuit$ への移行は上と同じで、関係式がひとつ増えるだけなので簡単。k-torsion は sheaf theory で処理できる。local に考えて大丈夫。

(後々のこと: $Z[k]$ 上の flatness は Z 上で大体は十分かもしれない。それでも $Z[k]$ 上考えるのは 単因子論による freeness の担保が大きいため。))

Proposition 4.1. *$A^\heartsuit$ is equal to a subalgebra of* $\Bbbk_1[k, \frac{1}{k}, \{x_j, x'_j, e_j, e'_j\}] (\cong \mathrm{WC}_{n,m+1}(\Bbbk[\frac{1}{k}])$ *generated by* $\mathrm{WC}_{n,n+1}$ *and* $m = \sum_i e_i e'_i$.

$$A^{\heartsuit} = \Bbbk_1[k, C, m, e_0, e_0', x_j, x_j', e_j, e_j']$$

で、

$$\bar{\varepsilon} = e_0' + \sum_j x_j e_j'$$

であるから、

$$A^{\heartsuit} = B[m] + e_0 B[m] + B[m]\bar{\varepsilon} + e_0 B[m]\bar{\varepsilon}$$

である。

IDEAS/kaehler/lemma.tex にあることから、

$$m^{[n+3]} = 0$$

がわかる。(つまり、積分 に現れる分母には限りがあるので、正標数 p でも $p >> n$ なら実行できる。)

部分積分により、

$$A^{\heartsuit} = B[m] + e_0 B[m] \pmod{\bar{\partial} A^{\heartsuit}}$$

$\bar{\partial}$-cocycle は $\frac{1}{k}\bar{\partial}(e_0 f)$ $(\bar{\partial} f = 0 \pmod{k})$ の形であり、

$$\partial(X_0^{-1} X_j) = e_j - x_j e_0$$

から、

$$e_0 B = e_0(\Omega \cdot \bar{\Omega})$$

でもあるから、

4.1. The element m. Let us put $m = C - \sum X_i \bar{X}_i$. It plays an important role in our calculation.

4.2. $m^{[l]}$, the falling factorial power of m. For any non-negative integer l, we denote by $m^{[l]}$ the following "generalized factorial power of m":

$$m^{[l]} = m(m - Ch)(m - 2Ch) \dots (m - (l-1)Ch).$$

4.3. formula of m. In this section, we do some calculations on m needed for our later use. The result is summarized in the following lemma.

LEMMA 4.2. *We have:*

(1) $\bar{\partial} m = -\bar{\varepsilon}$.
(2) $[m, \bar{\varepsilon}] = -Ch\bar{\varepsilon}$.
(3) $m\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(m - Ch)$.
(4) $\bar{\partial}(m^{[l]}) = -lm^{[l-1]}\bar{\varepsilon}$ $(l = 0, 1, 2, 3, \dots)$.

Proof. (1) Knowing that $m = \frac{1}{k}\sum E_i E_i'$, we have

$$\begin{aligned}\bar\partial m =& \frac{1}{k}\sum_i (-kX_iE_i') \\ =& -\sum_i X_iE_i' \\ =& -\bar\varepsilon.\end{aligned}$$

□

(2):

$$\begin{aligned}[m,\bar\varepsilon] =& \frac{1}{k}([\sum_i E_i\bar E_i, \bar\varepsilon] \\ =& -\frac{1}{k}\sum_i [E_i,\bar\varepsilon]\bar E_i \\ =& -\frac{1}{k}\sum_i ChkX_i\bar E_i \\ =& -Ch\bar\varepsilon\end{aligned}$$

(3) is a trivial consequence of (2).
(4): Induction in l. The case $l=0$ is trivial. The case $l=1$ is treated in (1).

$$\begin{aligned}\bar\partial m^{[l]} =& \bar\partial(m^{[l-1]}(m-(l-1)Ch)) \\ =& \bar\partial(m^{[l-1]})\cdot(m-(l-1)Ch) + m^{[l-1]}\bar\partial m && \text{(Leibniz rule)} \\ =& -(l-1)m^{[l-2]}\bar\varepsilon\cdot(m-(l-1)Ch) - m^{[l-1]}\bar\varepsilon && \text{(Induction hypothesis)}. \\ =& -(l-1)m^{[l-2]}\cdot(m-(l-2)Ch)\bar\varepsilon - m^{[l-1]}\bar\varepsilon && \big(\text{Consequence of (3)}\big). \\ =& -(l-1)m^{[l-1]}\bar\varepsilon - m^{[l-1]}\bar\varepsilon && \big(\text{by definition of } m^{[\bullet]}\big) \\ =& -lm^{[l-1]}\bar\varepsilon\end{aligned}$$

5. b_j という元と 層 S について考えてみた

b_0 etc のさばき方。

$$b_0 = \varepsilon - X_0^{-1}E_0C$$

もっと一般に

$$b_i = \varepsilon - X_i^{-1}E_iC$$

を考える。これは $\mathcal{A}$ の local section ではない。(homogeneous ではないから。) しかし、 $\mathcal{O}(1,1)$ を tensor して、C を掛けたもの、と考えれば合理化できる。ようするに、U_i 上の $\mathcal{A}_{\mathrm{sparse}}(1,1)$ の section である。

$$b_i - b_j = (X_j^{-1}dX_j - X_i^{-1}dX_i)C = -(x_{ij}^{-1}dx_{ij})C$$

これが $\{b_i\}$ というセクションたちに対応するコサイクルである。

$$b_i^2 = 0$$

以上のことから、 $\mathcal{A}_{\text{sparse}}$ は以下のような extension sequence をもつ:

$$0 \to (\Omega^\bullet \boxtimes 1)(1,1) \to \mathcal{A}_{\text{sparse}}(1,1) \to 1 \boxtimes \Omega^\bullet_{\text{sparse}} \to 0$$

The sheaf $\mathcal{S}$.

(この稿には、sheaf がたくさん出てきて、それなりに大事である。名前をいちいち考えるのは後回しにすることにして、とりあえず $S_1, S_2, \ldots$ と通し番号で呼ぶことにする。また、この稿では $\mathcal{O}(1)$ etc は non-commutative なそれを指すことにする。)

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の subsheaf $\mathcal{S}_0$ を 次のように定義しよう。

$U_i = \{X_i \neq 0\}$ 上の $\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(1,1)$ の section として、

$$b_i = \epsilon - X_i^{-1}E_iC$$

を考え、それらをつなげた sheaf $\mathcal{S}_0$ を考える。つまり、U_i 上の sheaf $\mathcal{O}b_i + \Omega^1$

$$0 \to \Omega^1(1,1) \to \mathcal{S}_0 \to \mathcal{O} \to 0$$

C^{-1} を全体に掛けることにより、次のような extension を得る。

$$0 \to \Omega^1 \to \mathcal{S}_0(-1,-1) \to \mathcal{O}(-1,-1) \to 0$$

$S_0(-1,-1)$ は $\mathcal{A}$ の subsheaf であるから、これを改めて $\mathcal{S}_1$ と書くことにすると、

$$0 \to \Omega^1 \to \mathcal{S}_1 \to \mathcal{O}C^{-1} \to 0$$

さて、$C^{-1}b_i$ たちの貼り合わせは、

$$X_i^{-1}E_i - X_j^{-1}E_j = (X_j/X_i)\partial(X_i/X_j)$$

であって、これは 第一変数の $\{X_i\}$ のみに依存するので、

層 $\mathcal{S}_1$ は $\mathbb{P}^n$ 上のある層 $\mathcal{S}_2$ を第一変数への射影

$$\pi_1 : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$$

によって引き戻したものと同型である:

$$\mathcal{S}_1 \cong \pi_1^*\mathcal{S}_2$$

6. まとめてみよう

coordinate と生成元をきちんと指定して記述してみよう。

$\mathcal{A}$ の、$U_{i\bar{j}} = \{X_i \neq 0 \text{ and } \bar{X}_j \neq 0\}$ での section として、

$$b_{i\bar{j}} = (X_i \bar{X}_j)^{-1} b_i$$

を考える。そして、$U_{i\bar{j}}$ 上の sheaf

$$\mathcal{O} b_{i\bar{j}} + \Omega^1$$

を考える。$\mathcal{O}$ はどっちの意味? とりあえず、transition function level で考えるなら問題なかろう。後で要考察。いまは $\Omega^\bullet \cdot \bar{\Omega}^\bullet$ を使いたいところなので、$\mathcal{O}$ と今書いているやつは $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \times \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ と解するべきだろう。

$\mathcal{O}(1,1)$ を tensor する。すなわち、$b_{i\bar{j}}$ に $(X_i \bar{X}_j) C^{-1}$ を掛ける。

$$(X_i \bar{X}_j) C^{-1} b_{i\bar{j}} = C^{-1} b_i = C^{-1} \epsilon - X_i^{-1} E_i$$

を考える。新しく出来た sheaf は $\mathcal{O} \cdot C^{-1}$ の Ω^1 による extension で、extension class は前述の $(X_j/X_i)\partial(X_i/X_j)$ で与えられる。

これは X_i^{-1} で定まる line bundle の $(X_j/X_i)\partial(X_i/X_j)$ で与えられる Ω^1 による extension と同型だろうか。

$A^{k,l}$ を local には

$$\mathbb{k}[x_0, \ldots, x_n, \partial x_0, \ldots, \partial x_n] \cdot \mathbb{k}[\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\partial}\bar{x}_0, \ldots, \bar{\partial}\bar{x}_n]$$

で定義しよう。

$U_{j\bar{k}}$ での section $b_{j\bar{k}}$ を

$$b_{j\bar{k}} = (\epsilon - X_j^{-1} E_j C)$$

で定義して、

$$\mathcal{S}_1 = A^{*,0} b_{j\bar{k}} + A^{*,0}$$

で定める。

CHAPTER 3

$A^\heartsuit$ における $\bar\partial$ コサイクル

「城崎」にあるように、 $A^\heartsuit$ の $\bar\partial$-cocycle は

$$\frac{1}{k}\bar\partial(e_0 b)$$

$e_0 b$: cocycle in $A^\heartsuit/kA^\heartsuit$. の形である。

$B = \Bbbk[h, k, C, \{x_j, x'_j, e_j, e'_j\}] \cong \mathrm{WC}_n$ に対して、

$$A^\heartsuit = e_0B[m] + e_0B[m]\bar\varepsilon + B[m] + B[m]\bar\varepsilon$$

$$e_0A^\heartsuit = e_0B[m] + e_0B[m]\bar\varepsilon$$

部分積分により、コサイクルは

$$\frac{1}{k}(e_0 f); \quad f \in B[m]$$

の形に直せる。m の次数を最小に取ろうとすると、m に関して最高次の係数を見ることにより、

$$\frac{1}{k}(e_0 f); \quad f \in B$$

の形のものに限って良いことがわかる。

$X_0\bar X_1 \neq 0$ で考えてみると、

$$b \in A^\heartsuit_{\text{sparse}}$$

の場合のみで良い。

$$e_0B = e_0R$$

R は半径の 2 乗の方ではなく、$dx, \bar\partial x'$ で生成される、いわば通常の form の空間。

DeRham, Dolbeault cohomology の関係に持ち込める。ただし、$\sum e_ie'_i = km$ の部分だけずれる。

$$\sum e_ie'_i = 0 \pmod{k}$$

で、 $\sum e_ie'_i$ は $\bar\partial\epsilon$ なので、 $\frac{1}{k}\bar\partial(e_0\epsilon)$ がでてくる。これが cocycles. $V = \mathbb{P}^n$ のとき。$r \in R_V$ にたいして、

$$\bar\partial(e_0 r) = 0 \qquad (\text{ in } A^\heartsuit/kA^\heartsuit)$$

を解こう。

WC_n で $\alpha = k\beta$ を考える。ただし、 α, β は $A^{\heartsuit}$ の元で、normal order で書かれているとする。ここでの normal ordering は $x > e > m > e' > x'$ の順で取るのがよかろう。

k についての degree を考えよう。 normal ordering を使えば、commutation relation を気にする必要がなくなり、k に関する degree が意味を持つようになる。そうすると、必然的に、β は m については一次以下であることがわかり、

$$\alpha = k(\beta_1 + m\beta_2) \qquad (\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Cliff}_1 \otimes \mathrm{WC}_n)$$

このことから、$k = 0$ および $\sum_i e_i e_i' = 0$ が relation の全てであることがわかる。 $\sum_i e_i e_i' = 0$ は lift すれば ε が出てくる。 まとめ

cocyle は

$$\frac{1}{k}\{e_0 b\}$$

と up to coboundary で等しい。

ただし $\bar{\partial}(e_0 b) = 0 \mod kA^{\heartsuit}$ である。

注意: b を取り替える前は $\bar{\partial} b = 0$ であるが、 up to coboundary で取り替える際にこの性質は失われる。

b をさらに特定するためには、 $\{x_1' \neq 0\}$ にさらに制限する必要がある。そこでは ϵ ならぬ $\tilde{\epsilon}$ 、すなわち

$$\tilde{\epsilon} = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j$$

で b を割る。 e_1 が消去できるね。同時に $x_1' = 1$ として非斉次化してよいことになる。

$$b = b_0 + b_1 \tilde{\epsilon}$$

$$A^{(01)} = A^{\heartsuit}[(X_0^p \bar{X}_1^p)^{-1}]$$

$f \mathfrak{n} A^{(01)}$ が, $\bar{\partial}(f) = 0$ を満たしたとする。(cocycle.) このとき、f の構造を知りたい。f に $X_0^p \bar{X}_1^p$ をたくさん掛けることにより、$f \in A^{\heartsuit}$ として十分である。

$$\begin{aligned}
&\bar{\partial} f = 0 \in A^{(0,1)} \\
\Longrightarrow\ &\bar{\partial} f = 0 \in A^{\heartsuit} \\
\Longrightarrow\ &f \sim \frac{1}{k}\bar{\partial}(e_0 f_1) \quad (\exists f_1 \in B \text{ such that } e_0 \bar{\partial}(e_0 f_1) = 0 \pmod{kA^{\heartsuit}})
\end{aligned}$$

1. flatness について

$A^\heartsuit$ を記述するには、この環に $\frac{1}{k}$ を付け加えた $A^\heartsuit[\frac{1}{k}]$ から語るのが早い。 $A^\heartsuit$ は $A^\heartsuit\frac{1}{k}$ の部分環であって、生成元が

$$A^\heartsuit = \Bbbk_1[C, k, \{x_j, x'_j\}_{j=1}^n, \{e_i, e'_i\}_{i=0}^n, m]$$

のように与えられるものである。$A^\heartsuit\frac{1}{k}$ は、

$$A^\heartsuit\frac{1}{k} = \Bbbk_1[C, k, \{x_j, x'_j\}_{j=1}^n, \{e_i, e'_i\}_{i=0}^n]$$

と書かれるが、その生成元のうち、x, x' の関係式が n 変数の Weyl 環の関係式と一致し、e, e' の方は $n+1$ 変数の Clifford 代数の関係式と一致。 x, x' と e, e' とは可換なので、結局 $A^\heartsuit[\frac{1}{k}]$ は Weyl 環と Clifford 代数のテンソル積と同型である。とくに、normal ordering が有効に使えて、$x < x' < e < e'$ なる順序を使うと、$A^\heartsuit[\frac{1}{k}]$ は

$$x^I(x')^J e^K(e')^L$$

を基底とする $\Bbbk_1[k, \frac{1}{k}]$ 上の free module であるということができる。もちろん、normal ordering は環構造までは直和分解の保証をしているわけではない。

さて、factorial power

$$m^{[l]} = m(m-Ch)(m-2Ch)\cdots(m-(l-1)Ch)$$

を考えると、これは定義により $A^\heartsuit$ に属する。

$A^\heartsuit$ は

$$x^I(x')^J e^K m^{[l]}(e')^L$$

で $\Bbbk_1[k]$ 上 linear に span されている。なぜなら、この形の元同士の積はまたこの形の元の和となるからである。(それを check するには、normal ordering に直すために m と x, x', e, e' との交換関係を見れば良い。–check!! m は x や x' とは可換。 e や e' とは??)

$e_i m^{[l]} = (m-Ch)^{[l]}e_i$. さて、$A^\heartsuit$ を上のような元の線型結合として見るならば、これはまず (環 $\Bbbk_1$ 上ではなく、) 体 $\Bbbk$ 上の線型結合を係数拡大したものと捉えることができる。されに、それは $e^K m^{[l]}(e')^L$ の形の元の $\Bbbk$ 上の線型結合 V に、然るべき環をテンソル積したものである。とくに、それは free な module であり、 $A^\heartsuit$ は $Z^\heartsuit$ 上 free な module であるということがわかる。

CHAPTER 4

公式

$\boxed{\text{公式}}$

$$\sum_i X_i \bar{X}_i + \frac{1}{k} \sum_i E_i \bar{E}_i = C$$
$$b_j = \epsilon - X_j^{-1} E_j C$$
$$\operatorname{ad} \epsilon = hC\partial$$
$$b_j^2 = 0 \qquad (\forall j)$$