

非可換ケーラー多様体としての
非可換射影多様体の様子について

土基 善文 (高知大・理)

2015/3/22(日) 10:20-10:35

今回言いたいこと (前半)

自然にケーラー構造を持つ多様体は非可換多様体の影である。
実際...

今回言いたいこと (前半)

自然にケーラー構造を持つ多様体は非可換多様体の影である。
実際...

Proposition

射影代数多様体には非可換多様体が付随する。

素数全体の集合 P の ultra filter の理論

\implies

$p \gg 0$ での標数 p の代数幾何学は 標数 0 のものと同じ。

そのあとしたいこと (目標)

- 標数 p (フロベニウスを持つ) と標数 0 (複素共役をもつ) の行き来。
- $H^{k,l}$ と $H^{l,k}$ の対称性。
- 合同ゼータの計算
- 具体例の計算

「影」の例

\mathbb{C}^n にシンプレクティック形式を

$$dX_1 d\bar{X}_1 + dX_2 d\bar{X}_2 + dX_3 d\bar{X}_3 + \cdots + dX_n d\bar{X}_n$$

で入れたものには

$$A_n(\mathbb{k}) = \mathbb{k}\langle X_1, \dots, X_n, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n \rangle / CCR$$

が対応する。

CCR:

$$[X_i, X_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, \bar{X}_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, X_j] = \delta_{ij}.$$

射影空間の非可換バージョン

$$\mathbb{C}^{n+1}/S^1 \supset \mu_R^{-1}(0) = S^{2n+1}/S^1$$

$$\mathbb{C}^{n+1} \leftrightarrow A = A_{n+1}(\mathbb{k}) = \mathbb{k}\langle X_0, X_1, \dots, X_n, \overline{X}_0, \dots, \overline{X}_n \rangle / CCR$$

$$\mu_R = X_0 \overline{X}_0 + \dots + X_n \overline{X}_n - R$$

$$J = A_{n+1}(\mathbb{k})\mu_R$$

$$A//J = \mathbb{I}_A(J)/J \cong \text{End}_A(A/J)$$

$\text{Spec}(A//J)$ が $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の非可換バージョンである。ただし、この構成は 標数 0 で考える。(標数 p のものは標数 0 で構成してから $\text{mod } p$ する。)

$$A//J = (A_{n+1}(\mathbb{k}))_0 / (A_{n+1}(\mathbb{k}))_0 \mu_R$$

A_{n+1} の gradation:

$$\text{sdeg}(X_i) = 1, \text{sdeg}(\bar{X}_i) = -1.$$

$$(A_{n+1}(\mathbb{k}))_0 = \mathbb{k}[\{X_i \bar{X}_j\}_{i,j=0}^{n+1}]$$

$$\mu_R = X_0 \bar{X}_0 + \cdots + X_n \bar{X}_n - R$$

検索してね

$\text{Spec}(A//J)$ は完備ではない。

完備化して shadow がちょうど $\mathbb{P}^n \times \overline{\mathbb{P}^n}$ のものができる。

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ を影に持つ非可換多様体の詳しい構成はアブストラクトにあります。

もしくは、google で検索してね。

一般の射影多様体に対しては

射影代数多様体 V の斉次定義イデアル I をとる。
 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の algebra の sheaf \mathcal{A} の剰余代数の層として

$$\mathcal{A}/\mathcal{A} \cdot (I^p + \bar{I}^p)$$

を考える...

一般の射影多様体に対しては

射影代数多様体 V の斉次定義イデアル I をとる。
 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の algebra の sheaf \mathcal{A} の剰余代数の層として

$$\mathcal{A}/\mathcal{A} \cdot (I^p + \bar{I}^p)$$

を考える...

Proposition

すべての射影代数多様体に対して、上記のような方法で非可換な対象を作ることができる。

問題...

一般の射影多様体に対しては

射影代数多様体 V の斉次定義イデアル I をとる。
 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の algebra の sheaf \mathcal{A} の剰余代数の層として

$$\mathcal{A}/\mathcal{A} \cdot (I^p + \bar{I}^p)$$

を考える...

Proposition

すべての射影代数多様体に対して、上記のような方法で非可換な対象を作ることができる。

問題...

問題

一つ一つの具体的な代数多様体に対し、上記対象を解析せよ。

今やろうとしていること (後半)

「微分形式」の導入。

- 超変数を導入して可換な理論における微分形式の理論と同様のものを得たい。
- 超変数のかからない部分は先程まででの議論と同じ。
- $z \leftrightarrow \bar{z}$ の対称性に配慮すること。

変数

$$X_1, \dots, X_n, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, E_1, \dots, E_n, \bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n$$

を導入し、次のようなモデルを考える。

- ① $X_i \leftrightarrow X_i \times$. (積作用素)
- ② $\bar{X}_i \leftrightarrow \text{Lie}_{\partial/\partial X_i}$. (Lie 微分)
- ③ $E_i \leftrightarrow \text{ext}(dX_i)$. (外部積)
- ④ $\bar{E}_i \leftrightarrow \text{int}(dX_i)$. (内部積)
- ⑤ $\partial \bullet \leftrightarrow [d, \bullet]$. 外微分との super commutator.

form の環 ($\leftrightarrow \mathbb{A}_{n+1}$)

$$B = \mathbb{k}[k_0, k_1, C, X_0, X_1, \dots, X_n, E_0, E_1, \dots, E_n, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{E}_0, \bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n]$$

- ① k_0, k_1, C は全ての元と可換。
- ② X, \bar{X} 変数と E, \bar{E} 変数とは可換。
- ③ $[\bar{X}_i, X_j] = \delta_{ij} k_0 C$.
- ④ $[\bar{E}_i, E_j] = \delta_{ij} k_1 C$.
- ⑤ $E_i^2 = 0, \bar{E}_i^2 = 0$.

B 上の odd derivation $\partial, \bar{\partial}$:

$$\partial : \begin{cases} X_i \mapsto k_0 E_i \\ \bar{X}_i \mapsto 0 \\ E_i \mapsto 0 \\ \bar{E}_i \mapsto k_1 \bar{X}_i. \end{cases} \quad \bar{\partial} : \begin{cases} X_i \mapsto 0 \\ \bar{X}_i \mapsto k_0 \bar{E}_i \\ E_i \mapsto -k_1 X_i \\ \bar{E}_i \mapsto 0. \end{cases}$$

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad (\partial + \bar{\partial})^2 = [\partial, \bar{\partial}] = -k_0 k_1 \text{ sdeg} \dots$$

symplectic quotient

$$\mu_R = k_1 \sum_i X_i \bar{X}_i k_1 + k_0 \sum_i E_i \bar{E}_i - R$$

を考え、

$$B_0 / B_0 \mu_R$$

を作る。

$\text{sdeg}_\mu : X_i, \bar{X}_i, E_i, \bar{E}_i$ にそれぞれ $+1, -1, +1, -1$ をふった signed degree. B_0 : signed degree が 0 であるような元の全体。