非可換射影空間の Dolbeault cohomology

土基 善文 (高知大・理)

September 14, 2015

Weyl 代数と Clifford 代数

$\Bbbk$:可換体. $\operatorname{char}\Bbbk = p \neq 0, 2$.
h, k, C: 他のものと可換な変数...

Weyl 代数と Clifford 代数

$\Bbbk$:可換体. char $\Bbbk = p \neq 0, 2$.
h, k, C: 他のものと可換な変数
Weyl 代数:

$$\mathrm{Weyl}_{n+1}^{(h,C)} = \Bbbk[h, C, X_0, X_1, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n]$$

relation (CCR): $[\bar{X}_i, X_j] = hC\delta_{ij}$.

Clifford 代数

$$\mathrm{Cliff}_{n+1}^{(h,C,k)} = \Bbbk[h, C, k, E_0, \ldots, E_n, \bar{E}_0, \ldots, \bar{E}_n]$$

relation(CAR): $[\bar{E}_i, E_j]_+ = Chk\delta_{ij}$.

Weyl Clifford 代数

$$
\begin{aligned}
\mathrm{WC}_{n+1}^{(h,C,k)} &= \mathrm{Weyl}_{n+1}^{(h,C)} \otimes_{\Bbbk[h,C]} \mathrm{Cliff}_{n+1}^{(h,C,k)} \\
&= \Bbbk[h, C, k, X_0, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_n, E_0, \ldots, E_n, \bar{E}_0, \ldots, \bar{E}_n]
\end{aligned}
$$

微分 $\partial, \bar{\partial}$ が存在:...

Weyl Clifford 代数

$$\begin{aligned} &\mathrm{WC}_{n+1}^{(h,C,k)} = \mathrm{Weyl}_{n+1}^{(h,C)} \otimes_{\Bbbk[h,C]} \mathrm{Cliff}_{n+1}^{(h,C,k)} \\ &= \Bbbk[h, C, k, X_0, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_n, E_0, \ldots, E_n, \bar{E}_0, \ldots, \bar{E}_n] \end{aligned}$$

微分 $\partial, \bar{\partial}$ が存在:

$$\partial : \begin{cases} X_i \mapsto E_i \\ \bar{X}_i \mapsto 0 \\ E_i \mapsto 0 \\ \bar{E}_i \mapsto k\bar{X}_i. \end{cases} \qquad \bar{\partial} : \begin{cases} X_i \mapsto 0 \\ \bar{X}_i \mapsto \bar{E}_i \\ E_i \mapsto -kX_i \\ \bar{E}_i \mapsto 0. \end{cases}$$

方針

1. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の graded sheaf of algebras $\mathcal{A}$ の構成。
2. $\mathcal{A}$ は $\partial, \bar{\partial}$ に関する double complex.
3. $(\mathcal{A}, \bar{\partial})$ は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の別の sheaf of algebras と quasi-isomorphic.
4. cohomollogy の計算
5. Deligne-Illusie 理論のマネ。
6. $h \to 0$ による可換理論との比較。
7. $\partial \leftrightarrow \bar{\partial}$ 対称性の吟味。

A^{pre} (拘束条件 $\mu_R = 0$)

$$\mathrm{WC} = \Bbbk[h, C, k, X_0, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_n, E_0, \ldots, E_n, \bar{E}_0, \ldots, \bar{E}_n]$$

$$\mu_R = \sum_i (X_i \bar{X}_i k + E_i \bar{E}_i) - RkC$$

$$[\mu_R, f] = \mathrm{sdeg}(f) f.$$

$$(\mathrm{WC})_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in WC; \mathrm{sdeg}(x) = 0\}$$

ただし sdeg とは...

A^{pre} (拘束条件 $\mu_R = 0$)

$$\mathrm{WC} = \Bbbk[h, C, k, X_0, \dots, X_n, \bar{X}_0, \dots, \bar{X}_n, E_0, \dots, E_n, \bar{E}_0, \dots, \bar{E}_n]$$

$$\mu_R = \sum_i (X_i \bar{X}_i k + E_i \bar{E}_i) - RkC$$

$$[\mu_R, f] = \mathrm{sdeg}(f) f.$$

$$(\mathrm{WC})_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in WC; \mathrm{sdeg}(x) = 0\}$$

ただし sdeg とは

$$\mathrm{sdeg}(X_i) = 1, \mathrm{sdeg}(\bar{X}_i) = -1, \mathrm{sdeg}(E_i) = 1, \mathrm{sdeg}(\bar{E}_i) = -1,$$
$$\mathrm{sdeg}(k) = 0, \mathrm{sdeg}(h) = 0, \mathrm{sdeg}(C) = 0.$$

A^{pre} (拘束条件 $\mu_R = 0$)

$$\mathrm{WC} = \Bbbk[h, C, k, X_0, \dots, X_n, \bar{X}_0, \dots, \bar{X}_n, E_0, \dots, E_n, \bar{E}_0, \dots, \bar{E}_n]$$

$$\mu_R = \sum_i (X_i \bar{X}_i k + E_i \bar{E}_i) - RkC$$

$$[\mu_R, f] = \mathrm{sdeg}(f) f.$$

$$(\mathrm{WC})_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in WC; \mathrm{sdeg}(x) = 0\}$$

$$\boxed{A^{\mathrm{pre}} = (\mathrm{WC})_0 / (\mu_R)}$$

Torsion の追放(新しい関係式の導入)

$$A = \mathrm{Image}(A^{\mathrm{pre}} \to A^{\mathrm{pre}}[\frac{1}{k}]).$$

$$\mu_R = \sum_i (X_i \bar{X}_i k + E_i \bar{E}_i) - RkC = 0 \quad \text{in } A$$

$\Longrightarrow$

$$m := \sum_i X_i \bar{X}_i = -\frac{1}{k} \sum E_i \bar{E}_i \quad \text{in } A$$

$\Longrightarrow \; m(m+h)(m+2h)\cdots(m+(n+1)h) = 0$ in A.
($(E_i\bar{E}_i)^2 = khE_i\bar{E}_i$ に注意)

Dolbeault complex

1. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の graded sheaf of algebras $\mathcal{A}$ の構成。
   $\leftarrow A$ に対応する層。
2. $\mathcal{A}$ は $\partial, \bar{\partial}$ に関する double complex.

Dolbeault complex

1. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の graded sheaf of algebras $\mathcal{A}$ の構成。
   $\leftarrow A$ に対応する層。
2. $\mathcal{A}$ は $\partial, \bar{\partial}$ に関する double complex.
   これを **Dolbeault complex と呼ぼう**

Dolbeault complex

1. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の graded sheaf of algebras $\mathcal{A}$ の構成。
   $\leftarrow A$ に対応する層。
2. $\mathcal{A}$ は $\partial, \bar{\partial}$ に関する double complex.
   これを **Dolbeault complex と呼ぼう**
3. $(\mathcal{A}, \bar{\partial})$ と quasi-isomorphic な層は?

予想

A は次の subalgebra と graded $\bar{\partial}$-complex として (tail 部分を除いて) quasi-isomorphic.

$$
\begin{aligned}
\Bbbk[h, & X_0, X_1, \dots, X_n, \\
& \bar{X}_0^p, \bar{X}_1^p, \dots, \bar{X}_n^p, \\
& \bar{X}_0^{p-1}\bar{E}_0, \bar{X}_1^{p-1}\bar{E}_1, \dots \bar{X}_n^{p-1}\bar{E}_n, \\
& \{X_a^p \bar{X}_a^p \epsilon - X_a^{p-1}\bar{X}_a^p E_a CR\}_{a=0}^n]
\end{aligned}
$$

ただし

$$\epsilon = \sum_i \bar{X}_i E_i$$

である。($\bar{\partial}\epsilon = \mu_0$ に注意。)