代数学 II 要約 NO.10

今日のテーマ:

$\boxed{\text{方程式系の合同ゼータ関数}}$

以下 p は素数であるとし、$q = p^s$ (s は正の整数) であるとする。

方程式系 n 個の変数 $X_1, \dots, X_n$ に関する $\mathbb{F}_q$ 係数の多項式 $f_1, f_2, \dots, f_m$ が与えられているとき、方程式系

$$
\begin{aligned}
&f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \\
&f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \\
&\dots, \\
&\dots, \\
&\dots, \\
&f_m(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0
\end{aligned}
$$

を $V(f_1, \dots, f_m)$ あるいは ($f_1, f_2, \dots, f_m$ がわかりきっている時には) V であらわす。

$\mathbb{F}_{q^r}$ での $V(f_1, \dots, f_m)$ の解の全体を $V(f_1, \dots, f_m)(\mathbb{F}_{q^r})$ で書き表す。

定義 10.1. 方程式系 V の合同ゼータ関数を

$$
Z(V, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\#V(\mathbb{F}_{q^k})}{k} t^k\right)
$$

によって定義する。定義体 $\mathbb{F}_q$ を明示したい時は、$Z(V/\mathbb{F}_q, t)$ などとも書く。

上の定義は幾分わかりにくいかも知れない。この式の exp は実は結果を有理式にするための工夫である。いま、 $\#V(\mathbb{F}_{q^k}) = \mathrm{tr}(A_1^k) - \mathrm{tr}(A_2)^k$ となるような行列 A_1, A_2 が存在したとするならば、

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\#V(\mathbb{F}_{q^k})}{k} t^k\right) \\
=&\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{tr}(A_1^k) - \mathrm{tr}(A_2^k)}{k} t^k\right) \\
=&\exp(\mathrm{tr}(-\log(1 - A_1 t) - \mathrm{tr}(-\log(1 - A_2 t)) \\
=&\det(1 - A_2 t)/\det(1 - A_1 t)
\end{aligned}
$$

と行列式表示ができる。このような A_1, A_2 があるかどうか、その固有値はどのようなものであるか、が面白い所であるが、本講義ではさすがにそこまでは踏み込めない。

例 . 2 個の変数 X, Y に関する方程式系 $V = V(aX + bY, cX + dY)$ ($a, b, c, d \in \mathbb{F}_q$) に対して、$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の階数を r とすると、

(1) $r = 2$ なら $Z(V, t) = 1/(1 - t)$
(2) $r = 1$ なら $Z(V, t) = 1/(1 - qt)$
(3) $r = 0$ なら $Z(V, t) = 1/(1 - q^2 t)$

知れないがほとんど)関係ない。

例．2個の変数 X, Y に関する方程式系 $V = V(XY)$ に対して、$Z(V,t) = (1-t)/(1-qt)^2$.

例．2個の変数 X, Y に関する方程式系 $V = V(Y - X^2)$ に対して、$Z(V,t) = 1/(1-qt)$

例．2個の変数 X, Y に関する方程式系 $V = V(YX - 1)$ に対して、$Z(V,t) = (1-t)/(1-qt)$

問題 10.1. 3変数の方程式系 $V(XYZ)$ の合同ゼータ関数をもとめなさい。

問題 10.2. 3変数の方程式系 $V(XYZ, X+Y+Z-1)$ の合同ゼータ関数をもとめなさい。

問題 10.3. $q = 5$ とする。2変数の方程式系 $V(X^2 + Y^2 - 1)$ の合同ゼータ関数 $Z(V/\mathbb{F}_5, t)$ をもとめなさい。

ヒント: $\mathbb{F}_5$ には -1 の平方根が存在する。それをうまく使うこと。