代数学特論 II 要約 NO.10

今日のテーマ:

$\boxed{\text{環と加群の復習}}$

代数学 II で、次のような議論を展開した。

(あ) 複素数を成分にもつような $n \times n$-行列 A が与えられたとき、$V = \mathbb{C}^n$ への不定元 X の作用を

$$X.v = Av$$

で定めることができる。

他方、微分方程式を扱うときには次のような話が出てくる。

(い) $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$ ないし $\mathbb{C}[[x]]$ 上に、m_x, ∂_x の作用を定めることができる。

(あ) の話では X の作用のみならず、$X^2, X^3, \dots$ およびその和 (複素係数の線型結合)、すなわち X の多項式の作用を考えるのがよいのであった。多項式一つ一つも大事であるけれども、それらを全部残らずまとめて箱に入れたもの (集合) を考えるのが更に有効である。これが多項式環 $\mathbb{C}[X]$ で、これは一種の「道具箱」を考えているようなものである。

同様にして、m_x, ∂_x で生成される環 $\mathcal{D}$ を準備しておいて、$C^\infty(\mathbb{R})$ ないし $\mathbb{C}[[X]]$ を $\mathcal{D}$-加群とみなす。これにより (線型) 微分方程式を環加群の枠組で考えることができるようになる。

例 10.1. $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}[[x]]$ を $\varphi(P) = P.1$ で定めるとき、φ の核 は $\mathcal{D}\partial$ であり、像は $\mathbb{C}[x]$ である。

例 10.2. $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}[[x]]$ を $\varphi(P) = P.x$ で定めるとき、φ の核 は $\mathcal{D}\partial^2 + \mathcal{D}(x\partial - 1)$ であり、像は $\mathbb{C}[x]$ である。

例 10.3. $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}[[x]]$ を $\varphi(P) = P.\exp(x)$ で定めるとき、φ の核 は $\mathcal{D}(\partial - 1)$ であり、像は $\mathbb{C}[x]\exp(x)$ である。

問題 10.1. $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}[[x]]$ を $\varphi(P) = P.\sin(x)$ で定めるとき、φ の核と像を求めよ。