代数学 II 要約 NO.3

今日のテーマ:

$\boxed{\text{「群の表現」の定義、正則表現}}$

環 R と有限群 G が与えられているとき、群環 $R[G]$ が定義されることを前回示した。

実は、G は $R[G]$ 自体の上に表現できる。このことを、とくに R が体 K のときに詳しく見てみることにする。

まず、群の表現の定義からしておこう。一般に、可換体 K 上の一般線型群 $\mathrm{GL}_n(K)$ とは、R の元を成分に持つような行列で、その行列式が可逆であるようなものを全部集めた物である。つまり、

$$\mathrm{GL}_n(K) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ; a_{ij} \in K, \quad \det(A) \neq 0 \right\}$$

定義 3.1. 可換体 K 上の G の n-次元表現とは、G から $\mathrm{GL}_n(K)$ への群準同型のことをいう。

K 上の G の n-次元表現 π が決まると、G の元 g の K^n の元 v への「作用」が

$$g.v = \pi(g)v$$

によって定まる。この「作用」は次の性質を満たす。

(1) $g.(v+w) = g.v + g.w,\ g.(cv) = c(g.v)\ (g \in G, v, w \in K^n, c \in K)$
(2) $(gh).(v) = g.(h.v)\ (g, h \in G, v \in K^n)$

逆に、このような「作用」があれば、上の定義の意味での表現を定義することができる。行列を書くよりもその方が簡明であることが多いので、以下では多くの場合作用でもって表現を定義する。

補題 3.1. 有限群 G と体 K が与えられているとする。$K[G]$ 上の G の表現 λ が

$$\lambda(g).h = gh$$

を K-線型に拡張したもの、すなわち、

$$\lambda(g).(\sum_h c_h h) = \sum_h c_h gh$$

により定まる。

定義 3.2. 上の補題で決まる表現 λ を G の正則表現と呼ぶ。

厳密にいえば、G の元にどのように順番を付けるかによって G の各元を表す行列は違ってくる。このことについてはもっと後で詳しく調べるが、さしあたっては、G の元の順番は適当に付けて、それを明示した上で行列で表現することにする。

問題 3.1. 4 つの元の偶置換全体のなす群 $\mathfrak{A}_4$ の正則表現で、$(1\ 2\ 3)$ および $(1\ 2)(3\ 4)$ に対応する行列を書き下しなさい。($\mathfrak{A}_4$ の元の順番を明示しておくこと。)

問題 3.2. 位数 $2n$ の二面体群

$$\mathbb{D}_{2n} = \langle a, b; a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

の正則表現で、$n = 2, 3$ の場合 (できれば、もっと一般の場合も) a, b に対応する行列はどのようになるか答えなさい。(二面体群については、すでに二回生段階で習っているはずなので、本問では詳しくは述べない。)