代数学 II 要約 NO.4

今日のテーマ:
$\boxed{\text{群の表現の例}}$

- 置換表現
  $\mathfrak{S}_n$ の部分群 G に対して、G の表現が次のように定まる。
  $$\sigma.e_i = e_{\sigma(i)}$$
  この表現を G の置換表現と呼ぶ。
- 恒等表現
  群 G の全ての元 g に対して、1 を対応させると G の一つの表現ができる。これを G の恒等表現という。
- 行列式を用いて作られる表現
  体 K 上の群 G の表現 $\rho : G \to GL_n(K)$ が与えられているときに、$\det(\rho) : G \to \mathrm{GL}_1(K)(= K^\times)$ を
  $$\det(\rho)(g) = \det(\rho(g))$$
  で定めることができる。

後の二つの例のように、群 G の表現 $\rho : G \to GL_n(K)$ のなかには、ρ が単射でないものもある。

定義 4.1. ρ が単射であるような表現のことを、<u>忠実な</u> 表現とよぶ。

置換表現など、いままでに挙げた表現は行列の成分に 0 と 1 しか出て来ないようなものばかりだったが、それだけでは面白くない。実は群の全ての表現は、正則表現をうまく「分解」することにより得られることが知られている。

「分解」などの詳細はもっと後の講義で述べることにして、今日の講義では $\mathfrak{S}_3$ の置換表現から、如何に二次の表現を作るかについて述べる。

補題 4.1.

- ρ が忠実な表現であることと、$\mathrm{Ker}(\rho) = e$ は同値である。
- 正則表現は必ず忠実な表現である。

問題 4.1. 講義の例にならって、C_3 の正則表現を分解して C_3 の二次の表現を作りなさい。

問題 4.2. $\mathfrak{A}_4$ の一次元表現のうち、恒等表現でないものを一つ見付けよ。(ヒント:$\mathfrak{A}_4$ の部分群のうち、位数 4 のものは正規部分群になる。これをうまく利用する。)

問題 4.3. 正則表現は置換表現の一種であることを例をあげて説明しなさい。