代数学 II 要約 NO.10

今日のテーマ: $\boxed{\text{群環 } \mathbb{C}[G] \text{ をその中心元で固有分解する。}}$

補題 10.1. *$Z(\mathbb{C}[G])$ には非自明な (0 以外の) 巾零元は存在しない。とくに、$Z(\mathbb{C}[G])$ の任意の元 z に対して、z の満たす $\mathbb{C}$ 上の多項式で次数が最小のもの (最小多項式) は重根をもたない。*

定義 10.1. 環 R の部分集合 J が R の左イデアルであるとは、J が次の条件を満足するときにいう。

(1) $0 \in J$
(2) $x, y \in J \implies x + y, x - y \in J$
(3) $r \in R, x \in J \implies rx \in J$

三番目の条件を、次の条件に置き換えて右イデアルを定義することができる。
(3′) $r \in R, x \in J \implies xr \in J$

R の (両側) イデアルとは、R の左イデアルかつ右イデアルになっているようなもの、言い換えれば上の (1),(2),(3) と (3′) を同時にみたすようなもののことである。

補題 10.2. *$Z(\mathbb{C}[G])$ の元 z にたいし、$\mathbb{C}[G]$ は z の固有空間の直和に (加群として) 分解し、さらにそれぞれの固有空間は $\mathbb{C}[G]$ の (両側) イデアルになる。もっと一般に、$Z(\mathbb{C}[G])$ の有限個の元 $z_1, z_2, \ldots, z_l$ にたいし、$\mathbb{C}[G]$ は $z_1, z_2, \ldots, z_l$ の同時固有空間 (それぞれの固有空間の共通部分) の直和に (加群として) 同型になり、それぞれの同時固有空間は $\mathbb{C}[G]$ のイデアルになる。*

命題 10.1. *$Z(\mathbb{C}[G])$ は次のような環 R_i の有限個の (環としての) 直積に分解する。*

(1) $Z(R_i) = \mathbb{C}$
(2) R_i-加群で、$\mathbb{C}$ 上有限次元のものは必ず完全可約である。

ついでに、次回以降に重要になる $M_n(\mathbb{C})$ の左イデアルの例を挙げておこう。

例 . 一般に、環 R の元 x にたいして、 Rx は R の左イデアルになる。とくに、$M_n(\mathbb{C})$ の元 $x_l = E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{ll}$ (E_{ij} は基本行列) にたいして、$J_l = M_n(\mathbb{C})x_l$ は $M_n(\mathbb{C})$ のイデアルである。

$$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset J_4 \subset \cdots \subset J_n = M_n(\mathbb{C}).$$

問題 10.1. 位数 8 の二面体群 $\mathbb{D}_8$ の群環 $\mathbb{C}[\mathbb{D}_8]$ を二つ以上の環の直積に分解せよ。

問題 10.2. $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_4]$ の元 $z = S(1\ 2)$ にたいして、z の最小多項式を求めよ。