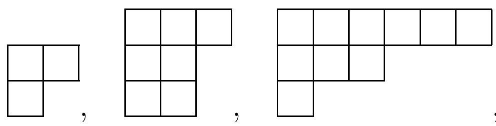
代数学 II 要約 NO.12

今日のテーマ: $\boxed{\text{対称群の表現とヤング図形}}$

今回は、気分を変えて、対称群の既約表現を実際に与える方法について (証明は抜きで) 述べよう。

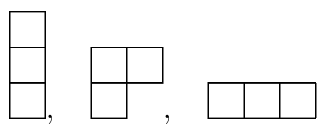
ヤング図形とは、正方形の箱を、縦横に次のような恰好で並べたものである。



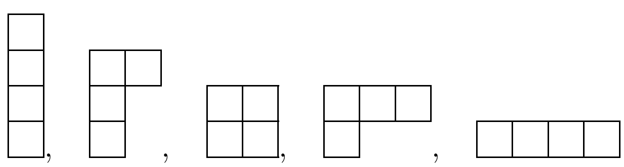
, 等々

つまり、横に並んだ正方形の数が単調非増加になるようにならべるわけだ。

正方形の数が n 個のヤング図形のことを、n 次のヤング図形という。実は n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約表現は、n-次のヤング図形の分だけあって、実際にそこから構成できることが知られている。つまり、 $\mathfrak{S}_3$ の既約表現は



に対応する 3 つがあり、$\mathfrak{S}_4$ の既約表現は



の 4 つがあると言うことになる。

n 次のヤング図形 λ をひとつとってそのおのおのの正方形に 1 から n までの数字をだぶらないように書き入れたものを (λ を台とする) ヤングの盤という。ヤングの盤には、次のような調子で多項式を対応させることができる。

$$\Delta\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}\right) = \Delta_{146}\Delta_{25}\Delta_3$$

ただし、右辺に出てくるのは「差積」であって、

$$\begin{aligned}
&\Delta_{ijk} = (X_i - X_j)(X_i - X_k)(X_j - X_k),\\
&\Delta_{ij} = (X_i - X_j),\\
&\Delta_i = 1
\end{aligned}$$

などという具合にあたえられる。

$\mathfrak{S}_n$ の元は n-変数の多項式の全体に文字の置き換えで作用する。Δ_T の形の多項式に $\mathfrak{S}_n$ の元を作用すると、T と同じ台をもって文字をつけ替えたような別のヤングの盤 T' があって、

$$\sigma(\Delta_T) = \Delta_{T'}$$

となることはすぐに確かめられるから、一つのヤング図形 λ を固定する毎に、そのような λ を台に持つような盤全体に関する線型結合

$$\sum_{T\text{ の 台は }\lambda} a_T \Delta_T \qquad (a_T \in \mathbb{C})$$

の全体は $\mathfrak{S}_n$ の表現になる。これを (本講義の参考書にあわせて) π_λ (表現空間の方は V_λ) と書くことにしよう。

実は、Δ_T どうしは独立ではなく、関係式が幾つかあることに注意せねばならない。$\mathfrak{S}_2$ の既約表現は次の空間で与えられる。

$$V_{\ydiagram{1,1}} = \mathbb{C}(X_1 - X_2), \qquad V_{\ydiagram{2}} = \mathbb{C}$$

同様に、$\mathfrak{S}_3$ の既約表現は次の空間で与えられる。

$$V_{\ydiagram{1,1,1}} = \mathbb{C}((X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_2 - X_3)), \qquad V_{\ydiagram{3}} = \mathbb{C}$$

$$V_{\ydiagram{2,1}} = \mathbb{C}(X_1 - X_2) + \mathbb{C}(X_1 - X_3)$$

($X_2 - X_3 = -(X_1 - X_2) + (X_1 - X_3)$ に注意)

問題 12.1. 3 次のヤング図形 λ(3 つある) のそれぞれについて、$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ の元 $z = S(1\ 2)(= (1\ 2) + (1\ 3) + (2\ 3))$ の (π_λ, V_λ) 上の作用は定数倍で与えられる。それらの値を決定しなさい。(結果を No.9 で述べたことと比べよ。)

問題 12.2. 4 次のヤング図形 λ (5 つある) のそれぞれについて、$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_4]$ の元 $z = S(1\ 2)$ が (π_λ, V_λ) 上どのような作用を行うか記述しなさい。