代数学I特論要約 NO.3

今日のテーマ

$\boxed{\text{体 } \mathbb{F}_p \text{ 上の線型代数、多項式環}}$

体 K 上の線型代数、とくに、行列、その和、差、積、行列式、線型方程式の解法 (掃き出し法、クラメールの公式) などは $\mathbb{C}$ や $\mathbb{R}$ 上の場合と全く同様に扱える。

例えば $\mathbb{F}_5$ 上の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めてみよう。通常と同様に、それは

$$(-2)^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。注意せねばならないことは、$\mathbb{F}_5$ での $-2(=3)$ の逆元は 2 であるということである。すなわち

$$A^{-1} = (-2)^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

体 K 上の多項式を考えることもできる。K 上の (X を変数とする) 一変数多項式の全体は環をなし、それを $K[X]$ と書く。多項式の既約性なども $\mathbb{R}$ 上のものと同様に定義される。

補題 3.1. K 上の 一変数多項式 $f \in K[X]$ が二次式もしくは三次式であるとき、f が (K 上の多項式として) 既約であるための必要十分条件は、$f(a) = 0$ となる元 $a \in K$ が存在することである。

問題 3.1. $\mathbb{F}_{23}$ 上の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

の行列式と逆行列を求めなさい。

問題 3.2. 10 以上の素数 p を適当に選んで、 $\mathbb{F}_p$ 上既約な 3 次式の例を一つ挙げなさい。理由も忘れずに書くこと。