代数学 I 特論要約 NO.12

今日のテーマ

$\boxed{\textbf{復習}}$

p は素数であるとする。このとき、

- $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は元の個数が p の体である。(定理 2.1)
- 各素数 p と正の数 r にたいして、元の個数が r の体 $\mathbb{F}_{p^r}$ が存在する。(定理 6.2)
- $\mathbb{F}_{p^r}$ は $\mathbb{F}_p$ 上の r 次既約多項式をもちいて構成できる。(命題 4.1)
- $p_R = 0$ なる環 R (とくに、$\mathbb{F}_{p^r}$ にたいして、
$$R \ni x \to x^p \in R$$
なる環準同型 F が存在する。これをフロベニウス準同型と呼ぶ。(命題 7.1)
- $F^r(x) = x^{p^r}$. $\mathbb{F}_{p^r}$ の元 x は $F^r(x) = x$ をみたす。(補題 5.1 とその系)
- 逆に、標数 p の体 K を任意にとったとき、
$$\{x \in K; F^r(x) = x\}$$
は K の部分体になり、$\mathbb{F}_{p^r}$ の部分体と同型になる。(その意味で、$\mathbb{F}_{p^r}$ は、ちょうど $F^r(x) = x$ をみたすような x の全体である)(補題 7.1)

$\mathbb{F}_q$ 上の方程式系 V の合同ゼータ関数は
$$Z(V,t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\#V(\mathbb{F}_{q^k})}{k} t^k\right)$$
によって定義されるのであった。ここに、$\#V(\mathbb{F}_{q^k})$ は V を $\mathbb{F}_{q^k}$ で考えたときの解の個数である。

問題 12.1. $V = V(X^2+Y^2-Z^2)$ にたいして、$Z(V/\mathbb{F}_q, t)$ をもとめよ。