今日のテーマ

$\boxed{\text{平面二次曲線の合同ゼータ関数}}$

X, Y に関する $\mathbb{F}_q$ 上の二次式 $f(X,Y)$ をきめることにより、$\mathbb{F}_q$ 上の方程式 $V(f)$ がさだまる。幾つかの例についてその合同ゼータ関数を求めよう。

I. 放物線 $V(Y-X^2)$

$$Z(V,t) = Z(\mathbb{A}^1,t) = \frac{1}{1-qt}$$

II. 双曲線 $V(XY-1)$

$$Z(V,t) = Z(\mathbb{A}^1,t)/Z(\mathbb{A}^0,t) = \frac{1-t}{1-qt}$$

III. (楕) 円 $V(X^2+Y^2-1)$

$$Z(V/\mathbb{F}_q,t) = \begin{cases} \frac{1-t}{1-qt} & (-1 \text{ が } \mathbb{F}_q \text{ の中で平方根をもつとき}) \\ \frac{1+t}{1-qt} & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

3 つには共通点がないだろうか。実は平面に「無限遠点」を付け加えるとこれらが統一的に眺められるようになる。

一般に、d 次式 $f(X,Y)$ に対して、$f_h(X,Y,Z) = Z^d(X/Z, Y/Z)$ を f の斉次化と呼ぶ。集合 $V(f_h)(\mathbb{F}_q)$ に、次のようなクラス分けを導入する。

$$(x_0,y_0,z_0) \sim (x_1,y_1,z_1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda(x_0,y_0,z_0) = (x_1,y_1,z_1) \text{ なる} \\ \lambda \in \mathbb{F}_q^\times \text{ が存在する。} \end{pmatrix}$$

$V(f_h)(\mathbb{F}_q)\backslash\{(0,0,0)\}$ をこのクラス分けで分けたクラスの全体を $V_h(f_h)(\mathbb{F}_q)$ とかく。$V_h(f_h)(\mathbb{F}_q)$ は、$V(f)(\mathbb{F}_q)$ に、「無限遠点」を付け加えたものである。

定義 13.1. 斉次方程式 $V_h(f_h)$ の合同ゼータ関数 $Z(V_h(f_h),t)$ を

$$Z(V_h(f_h),t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\#V_h(f_h)(\mathbb{F}_{q^k})}{k} t^k\right)$$

で定義する。

問題 13.1. $f = XY-1$ について、その斉次化 $f_h(X,Y,Z)$ と、合同ゼータ関数 $Z(V_h(f_h),t)$ を求めよ。