今日のテーマ

$\boxed{\text{射影二次曲線の合同ゼータ関数}}$

今回は q は奇素数の巾であるとする。

射影二次曲線の合同ゼータ関数を求めよう。X, Y の二次式の斉次化を考えるところからはじめても良いが、最初から二次斉次式を考える方が楽なので、そうする。

補題 14.1. $\mathbb{F}_q$ 上の二次斉次式 $f(X,Y,Z)$ にたいして、ある 3 次の正方対称行列 $A \in M_3(\mathbb{F}_q)$ が存在して、

$$f(X,Y,Z) = (XYZ)A\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

がなりたつ。

定義 14.1. f が非退化であるとは、上の補題で f に対応する A に対して、$\det(A) \neq 0$ のときにいう。

$E = \mathbb{F}_q^3$ の上基底をうまく取り換える ($\Leftrightarrow$ 座標変換をうまくとる) ことにより、$V_h(f)$ の点を上手に求めることを考えよう。次の (一見何でもない) 命題が鍵になる。

命題 14.1. E の元 $v \neq 0$ で、${}^t vAv = 0$ を満たすものが存在する。

命題 14.2. E の基底 $\{u_1, u_2, u_3\}$ で、次のような性質を満たすものが存在する。

(1) ${}^t u_1 A u_1 = 0.$
(2) ${}^t u_2 A u_1 = 0.$
(3) ${}^t u_3 A u_1 = 1.$

E の基底を基本ベクトルから $\{u_1, u_2, u_3\}$ に換えることにより方程式は

$$2XZ + aY^2 + 2bYZ + cZ^2$$

に置き換わる。(さらに座標変換をすれば $a = 1, b = 0, c = 0$ に帰着することもできる。)

この方程式の解の全体はすぐに書き下すことができて、

定理 14.3. $\mathbb{F}_q$ 上の非退化斉次二次式 f に対して、$V_h = V_h(f)$ の合同ゼータ関数は

$$Z(\mathrm{V}_h, t) = \frac{1}{(1-qt)(1-t)}$$

になる。*(*もっと強く、$V_h(f)$ は全て互いに同型である。*)*

(今回はレポート問題はありません。来週は試験。)