代数学 II 要約 NO.1

本講義の目的

有限群とその表現

有限群の定義は簡単なものであるが、その例を知らないと机上の空論になりかねない。実は位数が 100 以下ぐらいならば、手作業でも割りと簡単に与えられた位数の有限群を全て決定することができる。

解析のキーになるのはシローの定理で、これは位数の素因数分解に対応して群を調べることを可能にする。

そのあと実際に群を作る際には行列などによる表現を用いるのが楽である。

本講義ではその二つのことがらについて、例を交えながら述べる。実際に与えられた位数の群がどのぐらいあるのか見当がつくようになれば合格である。

なんと言っても簡単なのは巡回群である。これは

$$C_n = \langle a; a^n = e \rangle$$

と書かれるもので、元の数 (位数) が n である。

これには、a を $(1\ 2\ 3\ \ldots n)$ という巡回置換に対応することにより置換による表現を与えることができる。

また、行列による表現を与えることもできる。$n = 4$ ならば a に

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を対応させるとよい。行列や置換で表現することにより、群が実際に存在することを示すことができるとともに、計算による取扱いもやりやすくなるところがメリットである。

群の簡単な例としては他にも n 個の元の置換全体からなる群 (n-次対称群) $\mathfrak{S}_n$ がある。例えば、$\mathfrak{S}_3$ は位数 6 の元である。C_6 も位数 6 であったから、同じ位数をもつ群が複数あり得ることがわかる。

問題 1.1. 4 つの元 $\{1, 2, 3, 4\}$ の置換全体からなる群 $\mathfrak{S}_4$ の元を全て書き、$\mathfrak{S}_4$ の位数はいくらか答えなさい。

問題 1.2. 4 つの元 $\{1, 2, 3, 4\}$ の偶置換全体からなる群 $\mathfrak{A}_4$ の元を全て書き、$\mathfrak{A}_4$ の位数はいくらか答えなさい。