代数学 II 要約 NO.3

今日のテーマ

$\boxed{\text{準同型、準同型定理と正規部分群}}$

一般に、写像 $S_1 \to S_2$ があればそれによって S_1 のクラスわけが定義される。群の場合には群の構造を尊重した群準同型写像を考えるのがよい。今回は、群の演算を表すのに $\circ$ を用いる。

定義 3.1. 群 G_1 から群 G_2 への写像 φ が群準同型写像であるとは、φ が演算を保つ。すなわち、

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

がすべての $x, y \in G_1$ について成立するときにいう。全単射群準同型のことを同型とよぶ。

補題 3.1. 群準同型 $\varphi : G_1 \to G_2$ が与えられたとき、 φ は単位元、逆元を保つ。

命題 3.1. 群準同型 $\varphi : G_1 \to G_2$ が与えられたとき、

(1) G_1 には次のようなクラス分けが定義できる。

$$x \text{ と } y \text{ が同じクラス} \Leftrightarrow \phi(x) = \phi(y)$$

(2) $N = \varphi^{-1}(0)$ は G_1 の部分群であって、上のクラス分けは N による G_1 のクラス分け *(*定義 *2.3)* と一致する。*(*N のことを φ の核とよび、$\mathrm{Ker}(\varphi)$ で書き表す。*)*

群の準同型 $\varphi : G_1 \to G_2$ の核は単に G_1 の部分群であるというだけではなく、特別な性質をもっている。

定義 3.2. 群 G の部分群 H が G の正規部分群であるとは、任意の $x \in G$ と 任意の $h \in H$ に対して hx の G/H でのクラスが x のクラスに等しいとき、言い換えれば、ある $h' \in H$ があって、$hx = xh'$ がなりたつときにいう。

命題 3.2. 群 G の正規部分群 N があたえられたとき、G/N に群の構造が、演算を

$$[x] \circ [y] = [x \circ y]$$

($[?]$ は $?$ の G/H でのクラス*)* により定めることができる。G/N はこの演算について群をなす。

定理 3.3 (群の準同型定理)**.** 群準同型 $\varphi : G_1 \to G_2$ が与えられたとき、

(1) φ の核は G_1 の正規部分群である。
(2) φ の像 $\mathrm{Image}(\varphi)$ は G_2 の部分群である。
(3) φ は $G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ と $\mathrm{Image}(\varphi)$ との間の同型を引き起こす。

例 3.1. $\mathfrak{S}_n$ から $\mathbb{C}^\times$ への写像 φ を

$$\varphi(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma) \qquad \sigma \text{ の 符号}$$

で定義すると、φ は群の準同型になる。$\operatorname{Ker}(\varphi) = \mathfrak{A}_n$, $\operatorname{Image}(\varphi) = \{\pm 1\}$.

問題 3.1. 群 $G = \mathfrak{S}_4$ の元のうち、1 を動かさないようなものの全体を H とおく。すなわち

$$H = \{(1), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$$

とおく。このとき G の H によるクラス分けの表を実際に書き、つぎに G/H に演算を

$$[x][y] = [xy] \qquad (x, y \in G)$$

($[?]$ は $?$ の G/H でのクラス。) で定めようとしてもこれはうまく定義されないことを示しなさい。すなわち、$[x_1] = [x_2]$ かつ $[y_1] = [y_2]$ であるにもかかわらず、$[x_1 y_1] \neq [x_2 y_2]$ であるような $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$ の例を挙げなさい。

問題 3.2. 群 $\mathfrak{A}_4$ の正規部分群 K で、自明でないもの (つまり、$\{(1)\}$ でも $\mathfrak{A}_4$ でもないものの例を挙げよ。