代数学 II 要約 NO.6

今日のテーマ

$\boxed{p\text{-群、ある元と共役な元の個数}}$

定義 6.1. 群 G が与えられているとする。 G の元 z で、G のどんな元とも可換なものを G の中心元とよぶ。G の中心元の全体を $Z(G)$ と書いて G の中心と呼ぶ。

命題 6.1. どんな群 G についても、群 G の中心は G の正規部分群である。

前回述べたように、中心元とは、それと共役なものが自分自身でないような元のことと言っても良い。中心元以外はどんな様子になっているだろうか。

命題 6.2. 群 G と、その元 g が与えられているとする。そのとき、

(1)

$$H_g = \{x \in G; xgx^{-1} = g\}$$

は G の部分群をなす。(g の中心化群と呼ばれる。)

(2) G/H_g の元と、g と共役な元とは一対一に対応する。

(3) g と共役な G の元の全体を X_g すると、

$$|H_g| \times (\#X_g) = |G|$$

が成り立つ。とくに、$\#X_g$ は $|G|$ の約数である。

定義 6.2. 位数が素数 p のべき乗 (p^n) であるような群のことを p-群と呼ぶ。

次の命題は類等式の応用である。

命題 6.3. p-群 P の中心 $Z(P)$ の位数は必ず p の倍数である。とくに、P には単位元 e 以外の中心元が少なくとも一つは必ず存在する。

問題 6.1. 群 $\mathfrak{S}_4$ の各タイプの元に対して、その中心化群を書きなさい。

問題 6.2. 群 G の位数が素数 p の二乗、すなわち、

$$|G| = p^2$$

のとき、G は可換群であることを証明しなさい。