

今日のテーマ

シローの定理

一般に、有限群  $G$  の部分群  $H$  が与えられたとき、 $H$  の位数は  $G$  の位数の約数であった。(ラグランジュの定理)

この逆は正しくない。つまり、 $G$  の位数の約数が与えられても、 $G$  の部分群で、ちょうどその位数のものがあるとは、一般には限らない。しかし、特殊な場合に限っては大丈夫なことがある。

補題 9.1.  $p$ -群  $P$  の位数  $p^a$  の任意の約数  $p^b$  ( $b \leq a$ ) にたいして、 $P$  の部分群  $P_1$  で、位数がちょうど  $p^b$  であるものが存在する。

定理 9.1 (シローの定理).  $G$  の位数が  $p^a m$  ( $p$  は素数、 $m$  と  $p$  とは互いに素) であるとき、

- (1) 位数  $p^a$  の  $G$  の部分群が存在する。(これを  $G$  の  $p$ -シロー群と呼ぶ)
- (2)  $G$  の  $p$ -シロー群の個数を  $n$  とすると、 $n-1$  は  $p$  で割り切れる。
- (3)  $G$  の  $p$ -シロー群の一つを  $P$  とする。 $G$  の部分群  $P_1$  の位数が、 $p^a$  の約数である(すなわち、 $P_1$  はそれ自体  $p$ -群である) とすると、

$$xP_1x^{-1} \subset P$$

なる  $x \in G$  が存在する。

- (4)  $G$  の  $p$ -シロー群はどれも互いに共役である。

系 9.1.  $G$  の位数が  $p^a m$  ( $p$  は素数、 $m$  と  $p$  とは互いに素) であるとき、任意の自然数  $b \leq a$  に対して、位数  $p^b$  の  $G$  の部分群が存在する。

問題 9.1.  $S_5$  の 2-シロー群、3-シロー群の例をそれぞれ一つづつ挙げなさい。