

今日のテーマ

補遺

本講義では触れることができなかったが、有限アーベル群 (=有限可換群) については、次のことが知られている。

定理 13.1. 有限アーベル群 A はかならず有限個の巡回群の直積と同型である。

この定理の証明はしないが、 A の各シロー群は必ず正規部分群であるから、 A は必ずシロー群の直積に分解する。すなわち、

$$A \cong P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots \times P_n$$

で、各 P_i は素数 p_i の巾 $p_i^{e_i}$ を位数に持つようなアーベル群である。 P_i は

$$C_{p_i^{t_1}} \times C_{p_i^{t_2}} \times C_{p_i^{t_3}} \times \cdots \times C_{p_i^{t_n}}$$

という形に書ける、というところが定理の主張である。

例 13.1. 素数 p に対して位数 p^2 の群は必ずアーベル群である。上の定理から、それは C_{p^2} か、または $C_p \times C_p$ のどちらかと同型であることが分かる。

今までに講義でてきたことからをうまく用いると、100 以下程度の数 n が与えられたときに、位数 n の群を求めることがかなり容易になる。

以下、そのやり方の例を幾つか挙げよう。

命題 13.2. 群 G の位数が p^2q (p, q は相異なる素数) の群があるとする。このとき、

- (1) $p > q$ ならば、 G の p -シロー群は G の正規部分群である。
- (2) $p < q$ ならば、 $p^2q = 12$ のときを除いて G の q -シロー群は G の正規部分群である。

ゆえにいずれの場合も G は二つのアーベル群の半直積で書けることが分かる。

命題 13.3. 群 G の位数が 24 なら、2 シロー群の数は 1 or 3 個。

- (1) もし 1 個なら、2 シロー群は G の正規部分群である。
- (2) もし 3 個ならば、 G の、2-シロー群の全体への作用を考えれば、 G から \mathfrak{S}_3 への群準同型 ϕ が存在することがわかる。シローの定理とその証明から、 ϕ は全射であることがわかる。このとき ϕ の核の位数は 4 であるから、 G には位数 4 の正規部分群が存在する。

G に正規部分群 N が存在することがわかると、 G を調べるには $N, G/N$ なる二つの群を先ず調べて、つぎにそれらから G がどのぐらい得られるか、という 2 ステップに分けられるので、話がずいぶんやさしくなる。それに対して、

定義 13.1. 群 G に $\{e\}$ と G 以外の正規部分群がないとき、 G は単純群と呼ばれる。

例 13.2. 単純群の例

- (1) 素数 p を位数に持つ巡回群は単純群である。(これは例外的に簡単な単純群である。)
- (2) 一般に、 $n \geq 5$ のとき、 \mathfrak{A}_n は単純群であることが知られている。
- (3) (さらに、有限単純群は完全に分類されて、どれだけあるか知られている。)

実は、位数 100 までの範囲では、素数位数の巡回群ではない単純群は \mathfrak{A}_5 だけである。次の問題は、位数 60 の単純群が \mathfrak{A}_5 であることを証明するためのヒントである。

問題 13.1. 位数 60 の群 G が単純群であると仮定するとき、 G の 5-シロー群の数 k を求めよ。また、これにより G の \mathfrak{S}_k への群準同型 ϕ が得られるが、この ϕ は単射だろうか。理由を述べて答えなさい。

問題 13.2. 位数 pqr (p, q, r は素数、 $p < q < r$) の群 G には正規部分群であるようなシロー群が少なくとも一つ存在することを示しなさい。