

今日のテーマ

体に元を付け加えて新しい体を作る

定義 2.1. 体 L の部分集合 K が L の部分体であるとは、 K 自身が L の演算で体になっているときに言う。

定義 2.2 (体に元を付け加えてできる体). 体 L と、その部分体 K , および L の元 α が与えられているとする。このとき、 K と α を含む L の部分体のうち最小のものを $k(\alpha)$ (丸括弧に注意) と書き、 K に α を付け加えてできる体と呼ぶ。

補題 2.1.

$$K(\alpha) = \left\{ \frac{a(\alpha)}{b(\alpha)}; a, b \text{ は } K \text{ 係数の多項式} \right\}$$

定義 2.3. 体 K は体 L の部分体であるとする。 $\alpha \in L$ が K 上代数方程式を満足するとき、 α は K 上代数的であると呼ぶ。

命題 2.1. 体 K が体 L の部分体であって、 $\alpha \in L$ が K 上代数的であれば、 $K(\alpha)$ の任意の元は α の K 係数の多項式で書くことができる。

上の命題の証明はユークリッドの互除法を用いるのがもっとも普通であるが、ここではそれと等価な次の方法を探ろう。

補題 2.2. K, L, α は上の補題の通りとし、 p は $p(\alpha) = 0$ を満たすような K 係数の多項式であるとする。このとき、任意の K 係数の多項式 f, g に対して、次のことが成り立つ。

(1) $g(X)$ を $p(X)$ で割った商を $a(X)$, 余りを $b(X)$ とする。すなわち、

$$g(X) = a(X)p(X) + b(X)$$

とすると、

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{b(\alpha)}$$

(2) $p(X)$ を $g(X)$ で割った商を $q(X)$, 余りを $r(X)$ とする。すなわち、

$$p(X) = q(X)g(X) + r(X)$$

とすると、

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = -\frac{f(\alpha)q(\alpha)}{r(\alpha)}$$

問題 2.1. $\zeta \in \mathbb{C}$ は $\zeta^5 = 1$ を満たすような複素数であるとする。このとき、

$$\frac{1}{1 + \zeta + \zeta^2}$$

を ζ の有理数係数の多項式に直しなさい。