

今日のテーマ

環の準同型定理と体の自己同型

定義 4.1 (環の準同型の定義). 環の間の写像 $\phi: R \rightarrow S$ が準同型であるとは、次の条件が成り立つときにいう。

- (1) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ が任意の x, y についてなりたつ。
- (2) $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ が任意の x, y についてなりたつ。
- (3) $\phi(1_R) = 1_S$ がなりたつ

単射準同型写像のことを中への同型、全単射準同型写像のことを上への同型または単に同型とよぶ。

定理 4.1 (環の準同型定理). 環 R から環 S への準同型 ϕ に対して、

- (1) ϕ の核 $\text{Ker}(\phi)$ は R のイデアルである。
- (2) ϕ の像 $\text{Image}(\phi)$ は S の部分環である
- (3) ϕ は $R/\text{Ker}(\phi)$ と $\text{Image}(\phi)$ との間の同型を誘導する。

準同型定理をつかうと、体をつくる二つの方法 (No.3 と No.4) を比べることができる。一つ言葉を用意しておく

定義 4.2. 体 K は体 L の部分体であるとする。(K からみると、 L は K の拡大体であると呼ばれる。) $a \in L$ が K 上の非自明な代数方程式を満たすとき、 a は L 上代数的であると言う。

定理 4.2. 体 K の拡大体 L は K 上一つの方法 a で生成されているとする。さらに、 a は K 上代数的であるとする。このとき、 a の最小多項式を $m(X)$ とすると、次のことがいえる。

- (1) $\varphi: K[X] \rightarrow L$ を $\varphi(p(X)) = p(a)$ できめると、 φ は全射環準同型である。
- (2) φ の核は $m(X)k[X]$ である。

問題 4.1. $\mathbb{Q}[X]$ の元 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 で、 $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ にたいして $f_1(a) = f_2(a) = f_3(a) = f_4(a) = f_5(a)$ を満たすようなものを見つけなさい。例はいくらでもあるので他の人の解答とダブらないように注意すること。