

今日のテーマ

群の不変体

定義 11.1. L が K のガロア拡大のとき、 $G = \text{Gal}(L/K)$ の部分群 H に対して、

$$L^H = \{x \in L; \sigma(x) = x \quad \forall \sigma \in H\}$$

とおく。これは L と K の中間体である。

補題 11.1. L は K のガロア拡大であるとする。任意の $a \in L$ と $G = \text{Gal}(L/K)$ の部分群 H に対して、 L^H -係数のモニックな多項式 $f(X)$ で、次の性質を満たすものが存在する。

- (1) $\deg(f) = |H|$
- (2) $f(a) = 0$

定理 11.1. L が K のガロア拡大のとき、 $G = \text{Gal}(L/K)$ の部分群 H に対して、 L は L^H のガロア拡大であって、 $\text{Gal}(L/L^H) = H$

問題 11.1. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$ とおく。 $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の部分群 H で、位数が 2 あるいは 4 であるものを一つ見つけ、その H に対して L^H を決定せよ。