代数学演習 I 問題 NO.3

イデアルの定義、剰余環編

定義 3.1. 環 R の部分集合が R のイデアルであるとは、

(1) I は $(R,+)$ の部分加群である。
(2) $r \in R, a \in I \implies ra \in I, ar \in I$

の二条件が成り立つときに言います。

問題 3.1. 環 R の部分集合 $\{0\}$ は R のイデアルであることを示しなさい。(通常 $\{0\}$ を単に 0 であらわします。)

問題 3.2. 環の間の準同型 $f: R \to S$ の核 $\ker(f)$ は R のイデアルであることを示しなさい。

問題 3.3. I, J が環 R のイデアルならば、$I \cap J$ も R のイデアルであることを示しなさい。

問題 3.4. I, J が環 R のイデアルならば、

$$I + J = \{a + b; \quad a \in I, b \in J\}$$

も R のイデアルであることを示しなさい。

問題 3.5. I, J が可換環 R のイデアルならば、

$$IJ = \{\sum_i a_i b_i (\text{有限和}); a_i \in I, b_i \in J\} \quad (\text{注意})$$

も R のイデアルとなることを示しなさい。

問題 3.6. 可換環 R の巾零元全体

$$P = \{x \in R; x^n = 0 (\exists n \in \mathbb{Z}_{>0})\}$$

は R のイデアルとなることを示しなさい。

定義 3.2. 単位元を持つ可換環 R 上の一変数多項式とは、

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad (a_n, \ldots, a_0 \in R)$$

のように表されるもののことです。R 上の一変数多項式の全体は環をなします。これを R 上の一変数多項式環と言って、$R[X]$ であらわします。以下面倒なので《一変数多項式》が出てくる問題では、R は単位元を持つ可換環であると仮定していることにします。

問題 3.7. (単位元を持つ可換) 環 R 上の一変数多項式 $f(X)$ と R の元 a について、$f(a) = 0$ ならば、

$$f(X) = (X - a) g(X) \quad g(X) \in R[X]$$

とあらわせることを示しなさい。

定義 3.3. 前回定義するのを忘れましたが、環 R の元 a は、

$$ab = 0$$

なる $b (\neq 0) \in R$ が存在するとき、左零因子と呼ばれます。右零因子も同様に定義されます。可換環では、左右の区別がいらないので、単に零因子と呼びます。零因子が 0 しかない可換環を整域と呼びます。

問題 3.8. 整域 R 上の 一変数多項式 $f(X)$ は、R に高々 d 個しか根を持たないことを示しなさい。

問題 3.9. 可換環 R 上の一変数多項式 $f(X)$ の係数のうちに非零因子があれば、$f(X)$ は $R[X]$ の非零因子となることを示しなさい。

問題 3.10. 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の二変数多項式環 $\mathbb{Q}[X,Y]$ の次のイデアル I, J をなるべく簡単な生成元で表しなさい。

$$I=(X+Y(X+1),Y,X^2), J=(X+Y,X+Y^2,X+Y^3,X+Y^4,X+Y^5)$$

問題 3.11. 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体のなす環 $R=C([0,1])$ を考えます。次のものは R のイデアルになりますか？

(1) $S_1=\{f\in R;\quad f(1/2)=0\}$
(2) $S_2=\{f\in R;\quad f(1/2)=1\}$
(3) $S_3=\{f\in R;\quad f(x)=0$ がすべての $x\in[1/2,1]$ について成り立つ$\}$
(4) $S_4=\{f\in R;\quad f(x)=1$ がすべての $x\in[1/2,1]$ について成り立つ$\}$

問題 3.12. 開区間 $(0,1)$ 上の 連続関数全体のなす環 $R=C(0,1)$ の部分集合

$$S=\{f\in R;\lim_{x\to 0}f(x)=0\}$$

は R のイデアルになりますか？

問題 3.13. (1) 開区間 $(0,1)$ 上の 連続関数全体のなす環 $R=C(0,1)$ の部分集合

$$S=\{f\in R; f \text{ は } (0,1) \text{ で有界}\}$$

は R の部分環であることを示しなさい。

(2) S の部分集合

$$I=\{f\in S;\lim_{x\to 0}f(x)=0\}$$

は S のイデアルであることを示しなさい。

補題 3.1. R は単位元をもつ環であるとし、I をそのイデアルとする。このとき、

(1) R に同値関係 $\sim$ が、次のようにして決まる。

$$a\sim b \Leftrightarrow a-b\in I.$$

(2) $R/\sim$ に、足し算を次のようにして入れる。

$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}\quad (\bar{?} \text{ は } ? \text{ の } \sim \text{ に関するクラスを表す。})$$

この足し算はうまく定義されていて、$R/\sim$ はこの足し算について可換群になる。

(3) $R/\sim$ に、かけ算を次のようにして入れる。

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{a\cdot b}$$

このかけ算はうまく定義されていて、$R/\sim$ はこのかけ算について半群になる。

(4) $R/\sim$ は上で定義された足し算、かけざんに関し環をなす。しかも、この環は単位元 $\bar{1}$ を持つ。

定義 3.4. 上の補題の仮定のもとで、$R/\sim$ に上のような足し算、かけ算を入れて環にしたものを R/I と書き、R の I による剰余環と呼ぶ。

問題 3.14 (この問題は全部といて一点). $\mathbb{Z}$ のイデアル $I = 10\mathbb{Z}$ について、$\mathbb{Z}$ に上記補題のような同値関係をいれたとき、

(1) 1 と同値であるような $\mathbb{Z}$ の元を正、負ともに 2 個ずつあげなさい。それらを $a_1, \dots, a_4$ とする。
(2) 3 と同値であるような $\mathbb{Z}$ の元を正、負ともに 2 個ずつあげなさい。それらを $b_1, \dots, b_4$ とする。
(3) 上のようにして取った a_i, b_j の全ての組合せ $(16$ 通り$)$ について、
$$a_i + b_j$$
をもとめ、そのおのおのについて、それと同値になる $\mathbb{Z}$ の元を $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ のなかから一つ選びなさい。

問題 3.15 (この問題は全部といて一点). $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ において、整数 $?$ のクラス (同値類) を $[?]_{10}$ で表すことにする。このとき、

(1) $[10]_{10} = [0]_{10}$ であることを証明しなさい。
(2) $[2]_{10} \neq [0]_{10}$ であることを証明しなさい。
(3) $[5]_{10} \neq [0]_{10}$ であることを証明しなさい。
(4) $[2]_{10} \times [5]_{10}$, $[3]_{10} \times [7]_{10}$ をできるだけ簡単な形になおしなさい。

問題 3.16. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ のなかで、
$$x^2 = 1$$
を満たすものを、全て挙げなさい。

問題 3.17. $n = 3 \times 5 \times 7 \times 11 (= 1155)$ とする。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のなかで、
$$x^2 = 1$$
を満たすものを、全て挙げなさい。

問題 3.18.
$$1234567891234567$$
を 9 で割ったあまりはいくらだろうか？できるだけ簡潔な理由をつけて (計算機を用いることなく) 答えなさい。

問題 3.19.
$$1234567891234567$$
を 11 で割ったあまりはいくらだろうか？できるだけ簡潔な理由をつけて (計算機を用いることなく) 答えなさい。

問題 3.20.
$$1234567891234567$$
を 99 で割ったあまりはいくらだろうか？できるだけ簡潔な理由をつけて (計算機を用いることなく) 答えなさい。