

## 一意分解環・単項イデアル整域・ユークリッド整域編 (2)

問題 10.1. 単項イデアル整域  $R$  の元  $a, b$  について、 $R$  のイデアル  $I = (a, b)$  は、( $R$  が単項イデアル整域だから、) ある一つの元  $d$  で生成されるイデアル  $(d)$  に一致する筈です。この  $d$  は  $a, b$  の最大公約元であること、すなわち、

- (1)  $d$  は  $a, b$  の公約元である。(つまり  $a = da', b = db'$  となる  $a', b' \in R$  が存在する。)
- (2)  $d' \in R$  が  $a, b$  の公約元ならば、 $d'$  は  $d$  の約元である。

ということを示しなさい。

上の問題により、単項イデアル整域では、最大公約元が数のときと同様に扱えます。

問題 10.2.  $\alpha$  を  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  の素元とします。このとき、 $|\alpha|^2$  は素数か、素数の 2 乗かのいずれかであることを示しなさい。(ヒント: 素数  $p \in \mathbb{Z}$  が  $|\alpha|^2$  の約数ならば、 $p|\alpha\bar{\alpha}$ .  $p$  と  $\alpha$  との最大公約元をとってみなさい。)

ユークリッド環においては、《ユークリッドの互除法》によって最大公約元を求めることができます。手始めに次の問題をどうぞ。

問題 10.3. 次の環  $R$  の二つの元の最大公約数をユークリッドの互除法により求めなさい。

- (1)  $R = \mathbb{Z}; 100010, 10124$
- (2)  $R = \mathbb{C}[X]; X^{10} - 1, X^{12} - 1$

例題 10.1.  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  において、 $3 + 4\sqrt{-1}, 15$  の最大公約元を求めなさい。

$|15| = 15 > 5 = |3 + 4\sqrt{-1}|$  だから、まず  $15$  を  $3 + 4\sqrt{-1}$  で割ってみる。

$$\frac{15}{3 + 4\sqrt{-1}} = \frac{9 - 12\sqrt{-1}}{5} = 1.8 - 2.4\sqrt{-1}$$

この商にもっとも近いのは  $2 - 2\sqrt{-1}$ 。

$$10 - (3 + 4\sqrt{-1})(2 - 2\sqrt{-1}) = 1 - 2\sqrt{-1}$$

ゆえに、 $15$  を  $3 + 4\sqrt{-1}$  で割った《余り》は  $1 - 2\sqrt{-1}$ 。こんどは  $3 + 4\sqrt{-1}$  を  $1 - 2\sqrt{-1}$  で割る。割り切れるので、答えは  $1 - 2\sqrt{-1}$ 。

問題 10.4.  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  において、次の各組の最大公約元を求めなさい。

- (1)  $12 + 36\sqrt{-1}, 5 + 13\sqrt{-1}$
- (2)  $7 + 8\sqrt{-1}, 226$

問題 10.5.  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  において、次の各組の最大公約元を求めなさい。

- (1)  $2 + 3\sqrt{-2}, 11 + 22\sqrt{-2}$
- (2)  $5 + 3\sqrt{-2}, 129$

問題 10.6.  $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$  の次の元を簡単にしなさい。

$$\bar{X}^5 + 2\bar{X}^4 + 3\bar{X} + 2$$

問題 10.7.  $\mathbb{Q}[X]/(X - 1)$  の元  $\bar{X}^{100}$  を簡単にしなさい。

問題 10.8. 環  $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$  の元  $a\bar{X} + b$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$ ) の逆元を (それが存在する場合には) 求めなさい。この環は体だろうか。

問題 10.9. 環  $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 1)$  の元  $a\bar{X} + b$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$ ) の逆元を (それが存在する場合には) 求めなさい。この環は体だろうか。

問題 10.10.  $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 5)$  の元  $(\bar{X} + 1)^3$  を簡単にしなさい。

問題 10.11. (1) 10 進数  $123456789(10) = 1 \times 10^8 + 2 \times 10^7 + 3 \times 10^6 + 4 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9$  を 9 で割った余りを求めなさい。

(2) 7 進数  $135246(7) = 1 \times 7^5 + 3 \times 7^4 + 5 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 4 \times 7 + 6$  を 6 で割った余りを求めなさい。

(3) 16 進数  $147ad258be369cf(16) = 1 \times 16^{14} + 4 \times 16^{13} + 7 \times 16^{12} + 10 \times 16^{11} + 13 \times 16^{10} + 2 \times 16^9 + 5 \times 16^8 + 8 \times 16^7 + 11 \times 16^6 + 14 \times 16^5 + 3 \times 16^4 + 6 \times 16^3 + 9 \times 16^2 + 12 \times 16 + 15$  を 15 で割った余りを求めなさい。(a=10,b=11,c=12,d=13,e=14,f=15; コンピュータの世界では  $147ad258be369cf(16)$  のことを  $147ad258be369cfh$  とか  $0x147ad258be369cf$  と書きます。

(4) 多項式  $X^{14} + 3X^5 + 7X^2 + 8$  を  $X - 1$  で割った余りを求めなさい。