

代数学 I 要約 NO.1

この講義の前半では、次の定理の証明を目標とする。

定理 1.1 (環の準同型定理). 環 R から別の環 S への準同型写像 $\phi : R \rightarrow S$ が与えられたとする。このとき、次が成り立つ。

- (1) ϕ の像 $\text{Image } \phi$ は S の部分環である。
- (2) ϕ の核 $I = \text{Ker } \phi$ は R のイデアルである。
- (3) 剰余環 R/I は $\text{Image } \phi$ と同型である。

後半では、環や体の実例、とくに「一次元の環」について詳しく扱う。

今日のテーマ 《環の定義・部分環の定義》

環とは、足し算、引き算と掛け算ができる集合のことである。

部分環とは、部分集合であって環になっているもののことである。

定義 1.1 (環の定義). 集合 R が環であるとは、足し算と呼ばれる写像

$$+ : R \times R \rightarrow R$$

と掛け算と呼ばれる写像

$$\times : R \times R \rightarrow R$$

が定義されていて次の性質を満たす時に言います。

- (1) R は足し算に関して可換群をなす。(R の足し算に関する単位元を R の零元といい、 0 (時には 0_R) と書く。)
- (2) R の積は結合法則を満たす。
- (3) R の足し算と掛け算は分配法則を満たす。すなわち、任意の $a, b, c \in R$ に対して、次のことが成り立つ。

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c, \quad c \times (a + b) = c \times a + c \times b$$

- (4) R は積に関して単位元を持つ。すなわち、ある $u \in R$ が存在して、すべての $x \in R$ に対して、 $xu = x$ かつ $ux = x$ が成り立つ。

例 1.1. 次のものは通常足し算、掛け算によって環になる。

- (1) (重要) 整数全体のなす集合 \mathbb{Z} .
- (2) 有理数全体のなす集合 \mathbb{Q} .
- (3) 実数全体のなす集合 \mathbb{R} .
- (4) 複素数全体のなす集合 \mathbb{C} .
- (5) 実数を成分として持つ 2 次の正方行列全体のなす集合 $M_2(\mathbb{R})$.
- (6) (重要) 実数上の一変数多項式全体のなす集合 $\mathbb{R}[X]$.

補題 1.1. 環 R の単位元は、ただ一つである。

今後、環 R の単位元を 1 (時には 1_R) と書く。

定義 1.2 (部分環の定義). R が単位元をもつ環であるとする. R の部分集合 S が R の部分環であるとは、 S が次の条件を満たす時にいう。

- (1) S は R の足し算、かけ算を流用することにより環になっている。
- (2) S は R の単位元を元として含む。

例 1.2. 次のものは複素数全体のなす環 \mathbb{C} の部分環である。

- (1) 整数全体の集合 \mathbb{Z} .
- (2) 有理数全体の集合 \mathbb{Q} .
- (3) 実数全体の集合 \mathbb{R} .
- (4) $\mathbb{Z} + \sqrt{-1}\mathbb{Z} = \{x + \sqrt{-1}y; x, y \in \mathbb{Z}\}$.

レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限: 次の講義の終了時まで。)

問題 1.1. \mathbb{C} の部分環 R が $\sqrt{-2}$ を含んだとします。このとき、 R は $\mathbb{Z} + \sqrt{-2}\mathbb{Z}$ を部分集合として含むことを示しなさい。

問題 1.2. $\mathbb{Z} + \sqrt{-2}\mathbb{Z}$ は \mathbb{C} の部分環であることを示しなさい。