今日のテーマ **《準同型と準同型定理》**

定義 6.1. R, S **はともに環であるとし、**$f : R \to S$ **をその間の写像とする。このとき、**f **が** R **から** S **への環準同型写像であるとは、次の条件が成り立つときにいう。**

(1) f **は** $(R, +)$ **から** $(S, +)$ **への群としての準同型である。すなわち、**

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

が、すべての R **の元** a, b **について成り立つ。**

(2) f **は** R **の積を** S **の積にうつす。すなわち、**

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

が、すべての R **の元** a, b **について成り立つ。**

(3) f **は** (R **の**) **単位元を** (S **の**) **単位元にうつす。すなわち、**

$$f(1_R) = 1_S$$

が成り立つ。

群 (**加法群**) **についての準同型の知識を使うと、次のことは直ちにわかる。**

補題 6.1. **環準同型** $f : R \to S$ **について、**

(1) $f(0_R) = f(0_S)$ **が成り立つ。**

(2) $f(-a) = -f(a)$ **が全ての** $a \in R$ **に対して成り立つ。**

つぎに、準同型定理の説明にはいる。

定義 6.2. **環準同型** $f : R \to S$ **について、**$f^{-1}(0)(= \{r \in R; f(r) = 0\})$ **のことを、**f **の核** (Kernel) **と呼び、** $\mathrm{Ker}(f)$ **で書き表す。**

f **の像** (Image) **とは、通常通り、**

$$\{f(r); r \in R\}$$

のことである。

補題 6.2. **任意の環準同型** $f : R \to S$ **にたいして、**

(1) $\mathrm{Ker}(f)$ **は** R **のイデアルである。**

(2) $\mathrm{Image}(f)$ **は** S **の部分環である。**

定理 6.1. **環準同型** $f : R \to S$ **について、**R **の同値関係** $\sim_f$ **を**

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

で定義し、また $r \in R$ **の** $R/\mathrm{Ker}(f)$ **でのクラスを** $\bar{r}$ **とすると、次のことが成り立つ。**

(1) $x, y \in R$ **にたいして、**

$$x \sim_f y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

が成り立つ

(2) f **は**

$$R/\mathrm{Ker}(f) \ni \bar{r} \mapsto f(r) \in \mathrm{Image}(f) \qquad (r \in R)$$

なる全単射準同型を誘導する。

定義 6.3. 環のあいだの全単射準同型のことを、同型とよぶ。容易にわかるように、環のあいだの同型 $f : R \to S$ が与えられたとき、f の逆写像 f^{-1} は S から R への同型になる。

※レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限：次の講義の終了時まで。)

(I) 環の準同型 $f : \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \ni [a]_{15} \mapsto [a]_5 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ($[?]_n$ は $?$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ におけるクラス) を考える。(本当は、f がうまく定義されていること、さらに f が実際に環の準同型であることを諸君が証明すべきだが、ここではそれは要求しない。) このとき、

(a) $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ の元 x 15 個のそれぞれについて、$f(x)$ を書きなさい。

(b) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の元 y 5 個のそれぞれについて、$f^{-1}(y)$ を書きなさい。

(II) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \ni [n]_{11} \mapsto [n]_5 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ はうまく定義されて、環準同型になるだろうか。

(III) 正の整数 k, l が与えられたとき、k, l にどのような関係があれば、$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \ni [n]_k \mapsto [n]_l \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ はうまく定義されて、環準同型になるのか、答えなさい。