$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ **《剰余環、準同型定理の復習》**

環 $R = \mathbb{Z}[X]/(X^2-3)$ において、$X \in \mathbb{Z}[X]$ の R でのクラスを $[X]$ と書くと、$[X]^2 - 3 = 0.$ すなわち、$[X]$ は 3 の平方根の役割を果たす。

このことをまとめたのが、次の補題である。

補題 11.1.

$$\mathbb{Z}[X]/(X^2-3) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$$

同様に、

補題 11.2.

$$\mathbb{Z}[X]/(X-3) \cong \mathbb{Z}$$

が成り立つ。これらの補題の証明には、準同型定理を使うのが便利である。

補題 11.3. $R = \mathbb{C}[X]/(X^{10})$ において、X のクラスを a とおくと、$a^{10} = 0$ が成り立つ。とくに、R において $1+a$ は可逆であり、その逆元は

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^9$$

である。

補題 11.4. $R = \mathbb{Z}[X]/(X^2-4X+2)$ において、X のクラスを a とおくと、$a^2 - 4a + 2 = 0$ が成り立つ。このことから、$R \cong \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ がわかる。

※レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限：次の講義の終了時まで。)

(I) $R = \mathbb{Q}[X]/(X^2+X+1)$ において、元 X の R でのクラスを a と書いたとき、a の満足する方程式をみつけて、

$$R \cong \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$$

であることを証明しなさい。