代数学 演習 C（コア）問題 NO.2

今日のテーマ 群を取り扱うときには、群の定義 (0),(1),(2),(3) に戻って考えよう。

(i) 基本的には、普通の掛け算 (あるいは、足し算) をやっていると思ってよい。
(ii) 積は、可換とは限らない。
(iii) 一般には、群の演算以外を用いてはならない。

問題 2.1. 群 G の元 x と、自然数 n について、x の n 個の積 $xx\ldots x$ を x^n と書き、$(x^n)^{-1}$ (x^n の逆元) を x^{-n} と書きます。任意の整数 a, b について、

$$x^a x^b = x^{a+b}, (x^a)^b = x^{ab}$$

が成り立つことを示しなさい。

問題 2.2. 集合 G に演算 $\cdot$ が定義され、この演算は結合法則を満たすとします。さらに、G の任意の元 a, b について、$a \cdot x = b, y \cdot a = b$ となる $x, y \in G$ が存在したとします。(一意性は仮定しない。) この時 G は群となることを示しなさい。

問題 2.3. 群の元 a, b に対して、

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

が成り立つことを示しなさい。$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ はいつでも正しいといえますか？(こういう問題では、正しい時には証明を、正しくない時には具体的な例をあげることを要求しています。)

問題 2.4. 有限個の元を持つ群 G について、そのどの元 a についても、$a^n = e$ (e は単位元) となる自然数 n が存在する事を示しなさい。

問題 2.5. 群 G の任意の元 a が、、$a^2 = e$ (e は G の単位元) となるとすると、G は実は可換群であることを示しなさい。

問題 2.6. 一般に、群の元 a, b について、

$$ab^{-1} = b^{-1}a$$

は正しいといえますか？

問題 2.7. 群 G の元 $a, b, c, d, f, g, h, k, l$ について、次の元をできるだけ簡単に表しなさい。

$$(abcd)^{-1}abc(h^{-1}g)^{-1}(fh)^{-1}klk^{-1}$$

問題 2.8. 群 G の二つの元 a, b が、関係 $ba = a^3b$ を満たすとき、$ba^5 = a^{15}b$ が成り立つことを示しなさい。

問題 2.9. 群 G の二つの元 a, b が次のような関係式を満たすとします。

$$a^{60} = e, b^4 = e, \quad ab = ba^{20}$$

このとき、$a^3 = e$ であることを示しなさい。

問題 2.10. 群 G の元 a が $a^{15} = e, a^{25} = e$ をみたすとき、$a^5 = e$ であることを示しなさい。

問題 2.11. 群 G の二つの元 a, b が次のような関係式を満たすとします。

$$a^{60} = e, b^4 = e, \quad ab = ba^{20}$$

このとき、$a^3 = e$ であることを示しなさい。

問題 2.12. 群 G の二つの元 a, b が次のような関係式を満たすとします。

$$a^{60} = e, \quad ab = ba^2$$

このとき、$a^{15} = e$ であることを示しなさい。

問題 2.13. (線型代数の復習)

(1) 複素数全体のなす集合 $\mathbb{C}$ は、実数体 $\mathbb{R}$ 上の線型空間であることを示しなさい。更に、$\mathbb{C}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底を一つ挙げなさい。

(2) $x = a + bi \in \mathbb{C} \quad (a, b \in \mathbb{R})$ を固定したとき、

$$\begin{aligned} L_x :&\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ &\cup\!\!\!\!\!\!\!\;\; \quad \;\; \cup \\ &z \;\mapsto xz \end{aligned}$$

で $\mathbb{R}$-線型写像 L_x を定義できることを確かめなさい。

(3) (1) の基底を使って L_x を行列で表現しなさい。

問題 2.14. (複素数の問題) 一般に、複素数 $z = a + bi$ に対して、平面上の点 (a, b) を対応させることができます。このとき、二つの複素数 z, w と、

(1) 和 $z + w$

(2) 積 zw

との位置関係が幾何学的にどうなっているかを述べなさい。

(ヒント：(1) 平行四辺形の法則。(2)$z = r(\cos(\psi) + i\sin(\psi)), w = R(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ とおいてみなさい。(極座標表示))

問題 2.15. (線型代数の復習) A を 複素係数の $n \times n$-行列とします。このとき、

$$A^N + c_{N-1}A^{N-1} + c_{N-2}A^{N-2} + \cdots + c_1 A + c_0 E = 0$$

(E は単位行列)

となる自然数 N と、複素数 $c_{N-1}, c_{N-2}, \ldots, c_0$ が存在することを示しなさい。(ヒント、$M_n(\mathbb{C})$ が有限次元であることに注意しなさい。)

問題 2.16. 実数 θ を一つ固定する。二次正方行列 A, B を、

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定める。このとき、$AB = BA^{-1}$ が成り立つことを示し、さらにそれを用いて $A^k B = BA^{-k}$ が成り立つことを示せ。