代数学 C(コア) 演習問題 NO.5

今日のテーマ 《生成される部分群》

群 G と、その部分集合 M とが与えられているとします。このとき、

- M で生成される G の部分群とは、M を含む最小の部分群のことです。
- 特に、G 自身が M で生成される G の部分群であるとき、単に、「G は M で生成される。」といいます。
- 一つの元で生成される群を巡回群といいます。

《生成される部分群》の正確な定義は次のようになります。

定義 5.1 (《生成される部分群》の定義). 群 G とその部分集合 M とが与えられているとします。G の部分群 H が M で生成される G の部分群である (記号では $H = \langle M \rangle$ と書く) とは、次の条件を満たすときに言います。

(0) H は M を部分集合として含む G の部分群である。

(1) H は上の条件 (0) を満たすもののうち最小のものである。すなわち、次のことが成り立つ。

K が、M を部分集合として含む G の部分集合であれば、H は K の部分群になる。

問題 5.1. 整数の加法群 $(\mathbb{Z}, +)$ は $\{1\}$ によって生成されることを示しなさい。

問題 5.2. $(\mathbb{Z}, +)$ の部分群 H で、$\{7\}$ によって生成されるものを見つけなさい。

問題 5.3. $(\mathbb{Z}, +)$ の部分集合 $M = \{-28, 49, 105\}$ で生成される $\mathbb{Z}$ の部分群を求めなさい。

問題 5.4. 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の一般線型群 $\mathrm{GL}(2; \mathbb{Q})$ (即ち、行列式 $\neq 0$ となる 2×2-行列全体) の部分集合

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

は、$\mathrm{GL}(2; \mathbb{Q})$ の部分群であって、ある行列 A により、$H = \langle A \rangle$ となる (つまり H は A で生成される) ことを示しなさい。

問題 5.5. 0 以外の有理数全体のなす乗法群 $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ の部分群で、$\{4\}$ で生成されるものを求めなさい。

問題 5.6. 実数全体のなす加法群 $(\mathbb{R}, +)$ の部分群で、$\{1\}$ で生成されるものを求めなさい。

問題 5.7. $(\mathbb{Z}, +)$ の部分群で、105 と 27 で生成されるものを H とおきます。このとき、$H \cap \mathbb{Z}_{>0} = \{x \in H; x > 0\}$ の最小元を求めなさい。

問題 5.8. $(\mathbb{R}, +)$ の部分群で、$\{2, \sqrt{5}\}$ で生成されるものを H と置きます。このとき、$H \cap \mathbb{R}_{>0} = \{x \in H; x > 0\}$ には最小元がないことを示しなさい。

問題 5.9. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ のなかで、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される群を求めなさい。

問題 5.10. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ **のなかで、**

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 37 & -11 \end{pmatrix}$$

で生成される群を求めなさい。

問題 5.11.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義します。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ **の、**A, B **で生成される部分群を求めなさい。**

問題 5.12. 整数の加法群 $(\mathbb{Z}, +)$ **の部分群** H **が、**m, n **で生成されるとします。このとき、等式**

$$H = \{ma + nb; a, b \in \mathbb{Z}\}$$

が成り立つことを示しなさい。

問題 5.13. 群 G **の部分集合** M **と** G **の元** g_0 **とがあって、任意の** M **の元** m **に対し、**

$$g_0 m g_0^{-1} \in M$$

が成り立ったとすると、M **で生成される** G **の部分群** $H = \langle M \rangle$ **の任意の元** h **について**

$$g_0 h g_0^{-1} \in H$$

が成り立つことを示しなさい。