# 代数学 C(コア) 演習問題 NO.7

**剰余集合編**

$G$ を群、$H$ をその部分群とする。このとき、$G$ に、次のようにして同値関係 $\equiv_H$ が定まります。

$$x \equiv_H y \Leftrightarrow \text{ある } h \in H \text{ があって、} xh = y \text{ が成り立つ。}$$

この同値関係は群論においてはとくに重要なので、記号 $x \equiv_H y$ の代わりに、

$$x \equiv y \pmod H$$

と書いて、《$x$ は $y$ と $H$ を法として左合同である》と言う事にします。考えている部分群 $H$ が明確なときには、「$(\mathrm{mod}\ H)$」 を書くのは省略して良いです。$x$ のクラス $C(x)$ を $x$ の $H$ を法とする左剰余類と言います。

**定義 7.1.** 上のように決めた同値関係 $\equiv \pmod H$ による $G$ の商集合 $G/\equiv$ を $G/H$ と書き、$G$ の $H$ による左剰余類集合という。

**問題 7.1.** $\mathbb{Z}$ の部分群として、$H = 55\mathbb{Z}$ を考えます。このとき、

$$x \equiv 12 \pmod H$$

となるような $x$ の例を $5$ つ答えなさい。(なお、答には正の数ばかりでなく負の数も入れること。)

**定義 7.2.** $n$ 個のもの $1, 2, 3, \ldots, n$ の置換全体は群になります。この群を $n$ 次の対称群とよび、$\mathfrak{S}_n$ と書きます。

**問題 7.2.**

$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_3; \sigma(3) = 3\}$$

と置きます。

(1) $H$ の元を全て書き出しなさい。
(2) $H$ を法とする同値関係によって、$\mathfrak{S}_3$ がどのようにクラス分けされるか、クラス分けの表をつくって示しなさい。
(3) $\mathfrak{S}_3$ の元

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

が $\mathfrak{S}_3$ の単位元 $e$ と $H$ を法とする同値関係で同値になるのはいつか、$i, j, k$ を使って答えなさい。

**問題 7.3.** 前問で、$\mathfrak{S}_3$ を $\mathfrak{S}_4$ に換えて、

$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4; \sigma(4) = 4\}$$

と置きます。このとき前問と同様な問題に答えなさい。

**問題 7.4.** $n$ を正の整数とします。

$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \sigma(n) = n\}$$

と置きます。

(1) $H$ は $\mathfrak{S}_{n-1}$ と同一視できることを示しなさい。
(2) $\mathfrak{S}_n/H$ の元の個数を求めなさい。

**問題 7.5.** 有限巡回群 $C_n = \langle g_1; g_1^n = e \rangle$ について考えます。

(1) $C_{12}$ の、$\{g_1^3\}$ によって生成される部分群 $H_1$ は何になるか、元を全て挙げることによりいいなさい。
(2) $C_{12}$ の、$\{g_1^5\}$ によって生成される部分群 $H_2$ は何になるか、元を全て挙げることによりいいなさい。
(3) $C_{12}$ の、$\{g_1^{10}\}$ によって生成される部分群 $H_3$ は何になるか、元を全て挙げることによりいいなさい。
(4) $C_{12}/H_?$ (?=1,2,3) の元の個数を求めなさい。

**問題 7.6.** $C_{20} = \langle g_1; g_1^{20} = e\rangle$ の、$H = \langle\{g_1^4\}\rangle$ を法とする同値関係によるクラス分けを、クラス分けの表をつくって示しなさい。

**問題 7.7.** $n, l$ を正の整数とします。$C_n$ の部分群 $H$ を、$H = \langle\{g_1^l\}\rangle$ により決めます。このとき、$H$ の元の個数と、左剰余類集合 $C_n/H$ の元の個数を求めなさい。

**問題 7.8.** $n$ を正の整数とします。

$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \sigma(n) = n \text{ かつ } \sigma(n-1) = n-1\}$$

と置きます。

(1) $H$ は $\mathfrak{S}_{n-2}$ と同一視できることを示しなさい。
(2) $\mathfrak{S}_n$ の二元

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}$$

が $H$ を法として同値なのはどういう時ですか？
(3) $\mathfrak{S}_n/H$ の元の個数を求めなさい。

**問題 7.9.** (1) $\mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0\}$ はかけ算に関して群になることを示しなさい。
(2) $H = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ は $\mathbb{C}^\times$ の部分群になることを示しなさい。
(3) $\mathbb{C}^\times$ は $H$ を法としてどのようにクラス分けされるか、複素平面を利用して説明しなさい。