代数学 C(コア) 演習問題 NO.8

正規部分群編

群の部分群による剰余集合が、「自然なやり方で」群になるには、その部分群が正規部分群であればよろしい。

定義 8.1. G を群、K をその部分群とする。K が G の正規部分群であるとは、任意の $g \in G$ と任意の $h \in K$ とに対して、

$$ghg^{-1} \in K$$

が成り立つときに言います。

問題 8.1. 次の各組 (G, S) について、S は G の部分群であるか、理由をつけて答えなさい。

(1) $G = \mathbb{Z}, S = \{0, 1, 2, \dots, \}$.
(2) $G = \mathbb{Z}, S = k\mathbb{Z} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$.
(3) $G = \mathbb{Z}, S = \mathbb{R}$.
(4) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), S = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. 但し、

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A;\ \ A$ は実数を成分に持つ n 次の正方行列で、$\det(A) \neq 0\ \}$,
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A; A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \det A = 1\}$.

(行列式の諸性質は自由に用いてよい。)

問題 8.2. 3 次の対称群 $\mathfrak{S}_3$ の部分集合 $\{(1), (1\ 2)\}$ は $\mathfrak{S}_3$ の部分群ではあるが、正規部分群ではないことを示しなさい。

問題 8.3. $\mathfrak{S}_3$ の部分集合 S で、条件

$$gSg^{-1} = S \quad (\forall g \in \mathfrak{S}_3)$$

は満たすけれども $\mathfrak{S}_3$ の正規部分群ではないものの例を一つ挙げなさい。

問題 8.4. 4 次の対称群 $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群 N が $(1\ 2)$ を元として含めば、

(1) N は $(2\ 3)$, $(3\ 4)$ も元として含むことを示しなさい。
(2) N は $\mathfrak{S}_4$ 全体に一致しなければならないことを示しなさい。

問題 8.5. 正の整数 k を一つ固定して、$H = k\mathbb{Z}$ とおきます。$G = \mathbb{Z}$ の元 x, y, z, w が、

$$x \equiv y (\mathrm{mod}\ H), z \equiv w (\mathrm{mod}\ H)$$

を満たすとすると、$x + z \equiv y + w (\mathrm{mod}\ H)$ と言えるかどうか？理由を述べて答えなさい。

問題 8.6. 前問で、G として $\mathbb{Z}$ のかわりに $\mathfrak{S}_3$ をとり、H として $\{(1), (1\ 2)\}$ をとります。G の元 x, y, z, w が、

$$x \equiv y (\mathrm{mod}\ H), z \equiv w (\mathrm{mod}\ H)$$

を満たすとすると、$xz \equiv yw (\mathrm{mod}\ H)$ と言えるかどうか？理由を述べて答えなさい。

問題 8.7. G は群であるとし、N はその正規部分群であるとします。G の元 x, y, z, w が、

$$x \equiv y (\mathrm{mod}\ N), z \equiv w (\mathrm{mod}\ N)$$

を満たすとすると、$xz \equiv yw (\mathrm{mod}\ N)$ が成り立つことを示しなさい。

問題 8.8. G は群であるとし、N はその正規部分群であるとします。G の元 g にたいし、その G/N でのクラスを $[g]$ と書くことにします。このとき、G/N 上の演算 ϕ (つまり、写像 $G/N \times G/N \to G/N$) を、

$$\phi([x],[y]) = [xy]$$

で定めることができることを示しなさい。(問題点はどこですか? N が G の正規部分群ではなくて単なる部分群だとどこが困りますか?N が G の部分群ですらない時にはどこが困りますか?)

問題 8.9. 前問で、$(G/N,\phi)$ は群になることを示しなさい。

定義 8.2. 前問のように、G が群、N がその正規部分群であれば、G/N には群の構造が入ります。この群のことを G の N による 剰余群といいます。なお、G/N の演算を表す記号 $(+ \text{ or } \times)$ は、G の演算を表す記号と同じものが使われるのが普通です。

問題 8.10. $\mathbb{Z}/300\mathbb{Z}$ での足し算 $([175]+[200])+[50]$ を簡単な形に直しなさい。また、$[150]+[x]=[0]$ を満たす正の整数 x の例を一つ挙げなさい。

問題 8.11. G を群とし、その上の同値関係 $\sim$ が定まっているとします。$G/\sim$ に 乗法を、

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} \quad (a,b \in G; \overline{a} \text{ 等は } a \text{ 等のクラスを表す。})$$

で定めようと思います。この乗法が代表元の取りかたによらずにうまく定義される(すなわち、《$a \sim x, b \sim y$ ならばいつでも $\overline{ab}=\overline{xy}$ が成り立つ》) ならば、

$$N = \{x \in G; \quad x \sim e\}$$

は G の正規部分群となり、$a \sim b$ と $a \equiv b \ (\mathrm{mod} N)$ とは同値になる。ということをしめしなさい。

問題 8.12. 群 G とその正規部分群 N が与えられているとします。このとき、次の二つは同値であることを示しなさい。

(1) ある $n \in N$ があって、$xn = y$ と書ける。
(2) ある $n \in N$ があって、$nx = y$ と書ける。

問題 8.13. 前問で、「N が G の正規部分群である」と言う条件を「N が G の部分群である」に置き換えると、1. と 2. とは同値でなくなることを、実例を挙げて示しなさい。