代数学 C 演習問題 NO.10

《準同型定理の基本的な考え方》編

次回は、一学期の目標である《群の準同型定理》について出題することになります。今回はその前段階として、《群の準同型定理》の元になるアイディアについて出題します。今回の問題では、「群」は出て来ません。集合と写像の性質を使うだけです。問題 6.12 **が基本になります。**

集合をクラス分けする時には「集合の集合」が現れることになります。次の問題でまず《集合》の捉え方を確認してください。とくに、中括弧 $\{\}$ **の使い方をおろそかにしないようにして頂きたい。**

問題 10.1. **次の集合** A, B, C, D, E **の要素の個数をそれぞれ求めなさい。**

(1) $A = \{\{1, 2, 3\}\}$
(2) $B = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$
(3) $C = \{\{1, 2\}, \{3, \{4, 5\}\}\}$
(4) $D = \{1, 1\}$
(5) $E = \{\{x; x \in \mathbb{Z}\ ; x - r$ **は** 4 **で割り切れる。**$\}; r \in \mathbb{Z}\}$

問題 10.2. H = (**ひらがなの全体**) = { **あ**, **い**, **う**, . . . , **わ**, **ゐ**, **ゑ**, **を** }, A = (**英語のアルファベットの大文字全体**) $= \{A, B, C, \ldots, Z\}$ **とおきます。このとき、 次の問いに答えなさい。**

(1) $f : H \to A$ **を、**$f(x)$ = (x **をローマ字で書いた時の終りの文字**) **で定義します。**f **の像を求めなさい。**
(2) **上の** f **によって、**H **上に関係** $\equiv$ **を、**

$$h_1 \equiv h_2 \Leftrightarrow f(h_1) = f(h_2)$$

で定めると、これは同値関係になります。この同値関係で「た」と同値になるものを全て答えなさい。
(3) **上の同値関係は、「五十音表」と言う言葉を使うとどのように表現できるか、答えなさい。**
(4) $H/\equiv$ **の元の個数を求めなさい。**
(5) $g : H \to A$ **を、**$f(x)$ = (x **をローマ字で書いた時の始めの文字**) **で定義しようとする時の問題点を挙げなさい。**

問題 10.3. $C_n = \langle a; a^n = e\rangle$ **を、位数** n **の有限巡回群とします。**$f : \mathbb{Z} \to C_n$ **を、**

$$f(k) = a^k$$

とおくとき、次の問いに答えなさい。

(1) f **により** $\mathbb{Z}$ **上に関係** $\equiv$ **を、**

$$n_1 \equiv n_2 \Leftrightarrow f(n_1) = f(n_2)$$

で定めると、これは同値関係になります。この同値関係によって 1 **と同値なものを全て挙げなさい。(もちろん「列挙」する必要は無い。)**
(2) **上の同値関係によって** 0 **と同値なものを全て挙げなさい。**
(3) 1. **に挙げたものと** 2. **に挙げたものとの間の関係を述べなさい。**
(4) $\mathbb{Z}/\equiv$ **の元の個数を求めなさい。**

問題 10.4. $f : \mathbb{Z} \to \mathfrak{S}_4$ を,

$$f(k) = (1\ 2\ 3\ 4)^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

で定義します。このとき、

(1) $f(0), f(-1), f(-2)$ を求めなさい。
(2) f の像を求め、その元の個数を言いなさい。
(3) f により $\mathbb{Z}$ に関係 $\equiv$ を、

$$a \equiv b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

により定めると、この関係は同値関係になります。。この同値関係により 1 と同値なものを全て挙げなさい。
(4) $\mathbb{Z}/\equiv$ の元の個数を求めなさい。
(5) 本問に現れた同値関係と前問の同値関係との関係を述べなさい。

問題 10.5. $C_{10} = \langle g; g^{10} = e \rangle, C_4 = \langle h; h^4 = e \rangle$ とおき、$f : C_{10} \to C_4$ を、$f(g^k) = h^{2k} (k \in \mathbb{Z})$ で定義します。すなわち、

$$f(g) = h^2, f(g^2) = h^4 (= e), f(g^3) = h^6 (= h^2), \ldots.$$

(f はうまく定義されています。すなわち、《$g^k = g^l$ なら $h^{2k} = h^{2l}$》が成り立ちます。なぜですか?) さらに、C_{10} に関係 $\equiv$ を $a \equiv b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ で定義します (これは同値関係になります)。このとき C_{10} は $\equiv$ によりどのようにクラス分けされるかをクラス分けの表をつくって示し、$C_{10}/\equiv$ の元の個数を求めなさい。さらに、f の像も求めなさい。

問題 10.6. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を、$f(x) = (\cos(x), \sin(x))$ で定義します。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) f のグラフの概形を書きなさい。(答えは $\mathbb{R}^3$ の中の曲線になるはずです。)
(2) f の像を求めなさい。
(3) f により、$\mathbb{R}$ に関係 $\equiv$ を、 $a \equiv b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ で定義すると、これは同値関係になります。この同値関係について、一つの点に同値な点の全体グラフでどのような位置にくるか、答えなさい。

問題 10.7. 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$ を、$f(x) = (\cos(\frac{\pi x}{5}), \sin(\frac{\pi x}{5}))$ で定義します。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) f のグラフの概形を書きなさい。
(2) f の像を求めなさい。
(3) f により、$\mathbb{R}$ に同値関係を、 $a \equiv b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ で定義します。このとき、一つの点に同値な点の全体グラフでどのような位置にくるか、答えなさい。
(4) $\mathbb{Z}/\equiv$ の元の個数を求めなさい。