代数学 C NO.11 要約

今日のテーマ **共役**（きょうやく）

定義 11.1. 群 G の元 a, b が G の中で共役であるとは、ある $g \in G$ が存在して、 $gag^{-1} = b$ が成り立つときに言う。

補題 11.1. 群 G が与えられたとき、G 内で共役であるという関係は同値関係である。

補題 11.2. $G = \mathfrak{S}_n$ において、$\sigma \in G$ の $\tau \in G$ による共役を $\tilde{\sigma}$ と書くと、$\tilde{\sigma}(\tau(a)) = \tau(\sigma(a))$ ゆえに、$\tilde{\sigma}$ は $\tau(a)$ を $\tau(\sigma(a))$ にうつす。二行の表示を用いると、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

のとき、

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \tau(4) & \dots & \tau(n) \\ \tau(i_1) & \tau(i_2) & \tau(i_3) & \tau(i_4) & \dots & \tau(i_n) \end{pmatrix}$$

である。つまり、$\tilde{\sigma}$ は σ にあらわれる文字 $?$ をことごとく $\tau(?)$ により置き換えたものである。

定義 11.2. 群 G が与えられたとき、G 内で共役であるという関係でクラスわけした各クラスの元の個数を $\{h_i\}_{i=1}^t$ と (順不同で) 書いたとき、

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_t = |G|$$

なる関係式がもちろん成り立つ。この等式を類等式と呼ぶ。

なお、h_i の順番はどうでも良いと書いたが、通常 1 番目は G の単位元 e のクラスに当てるのが普通である。この場合は $h_1 = 1$ になる。

つぎの命題の証明の考え方は、群の準同型定理に似たところがある。

命題 11.1. 群 G の元 a に対して、その共役類を (本講義の教科書にならって) $K(a)$ と書き、さらに a の中心化群 $Z(a)$ を

$$Z(a) = \{g \in G; ga = ag\}$$

で定義すると、$Z(a)$ は G の部分群であって、$K(a)$ と $G/Z(a)$ との間には一対一に対応がつく。とくに、G が有限なら、

$$\#(K(a)) = \#(G/Z(a)) = |G|/|Z(a)|$$

という等式が成り立つ。

注意: $Z(a)$ の計算においてはどの群で考えているかが重要な意味を持つ。そこで、そのような区別が必要なときには $Z(a)$ のことを $Z_G(a)$ などと G を添字につけて表すことがある。$K(a)$ についても同様に、$K_G(a)$ などと書く場合がある。

※レポート問題

(I) $G = \mathfrak{S}_4$ の元 $a_1 = (1\ 2)$, $a_2 = (1\ 2\ 3)$ にたいして、それぞれの中心化群 $Z_G(a_1), Z_G(a_2)$ を求めなさい。