代数学 III 要約 NO.1

本講義の目的

標数 0 のガロア理論入門

ガロア理論といえばガロアの基本定理である。それは、体と群の関係を与える。群がなぜでてくるかといえば、「共役」という操作を集めてくるからである。以下「共役」の例を挙げてみよう。

• 複素共役

実数係数の多項式をもちいた関係式で $z_1 = 1+i$ と $z_2 = 1-i$ を区別できるだろうか。例えば、z_1 は

$$z_1^2 = 2z_1 - 2$$

という関係式を満たすが、これは z_1 を z_2 に置き換えても成り立つ。

実は、実数を係数とするどのような関係式も z_1 と z_2 とを区別することができない。これは方程式の言葉でいうと、z_1 が実係数の多項式 $p(X)$ の根の一つなら、z_2 も必然的に根である、と言い換えることもできる。

他方、複素係数なら両者は簡単に区別できる。例えば、

$$z_1^2 = 2i$$

だが、z_1 を z_2 に入れ換えた式は正しくない。

• もっと一般の共役

有理係数で $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ は区別できるだろうか。

ω を 1 の 3 乗根の一つとするとき、

有理係数で $\sqrt[3]{2}$ と $\omega\sqrt[3]{2}$ や $\omega^2\sqrt[3]{2}$ は区別できるだろうか。

「有理数」、「実数」以外でも、このようなことが起こることは十分あり得る。

そのため、「体」を考えるのが便利である。

定義 1.1. 集合 K が体であるとは、K の中で足し算引き算、およびかけ算ができて、さらに 0 でない元が K のなかで可逆であるときにいう。

一つの体を「持駒」として、どの程度のことができるか、あるいは、その体はどのような性質をもつか、ということが基本問題である。例えば、つぎのようなことを考えることができる。

$\mathbb{Q}$ に $\sqrt[3]{2}\omega$ を付け加えるようなときには、$\mathbb{Q}$ に ω を付け加え、しかる後に $\sqrt[3]{2}$ を考えるのが自然である。

同様に $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を考える際には、$\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ を手駒に加えて行くのが得策であることが多い。実は次のようなことが成り立つ。

例 1.1. 有理数体 $\mathbb{Q}$ を部分集合として含むような体 K が $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を元として含むならば、K は実は $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ も元として含む。

これらのことがらは、ガロア理論の一部であり、ガロア理論を理解すると方程式や体のことが手にとるように分かるようになる。

問題 1.1. 有理数体 $\mathbb{Q}$ を部分集合として含むような体 K が $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ を元として含むならば、K は $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{15}$ を元として含むことを示しなさい。