代数学III 要約 NO.2

今日のテーマ

$\boxed{\text{体に元を付け加えて新しい体を作る}}$

定義 2.1. 体 L の部分集合 K が L の部分体であるとは、K 自身が L の演算で体になっているときに言う。

定義 2.2 (体に元を付け加えてできる体). 体 L と、その部分体 K, および L の元 α が与えられているとする。このとき、K と α とを含む L の部分体のうち最小のものを $k(\alpha)$ (丸括弧に注意) と書き、K に α を付け加えてできる体と呼ぶ。

補題 2.1.

$$K(\alpha) = \{\frac{a(\alpha)}{b(\alpha)}; a, b \text{ は } K \text{ 係数の多項式}\}$$

定義 2.3. 体 K は体 L の部分体であるとする。$\alpha \in L$ が解になるような K 上の一変数多項式 $f(X) \quad (\neq 0)$ であって、$f(\alpha) = 0$ をみたすものが存在するとき、α は K 上代数的であると呼ぶ。

命題 2.1. 体 K が体 L の部分体であって、$\alpha \in L$ が K 上代数的であれば、$K(\alpha)$ の任意の元は α の K 係数の多項式で書くことができる。

上の命題の証明はユークリッドの互除法を用いるのがもっとも普通である。ユークリッドの互除法については、現3年生は代数学Iの No.8 で習っているはずである。(

http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/kogi/kogi2005_koki/

に 要約が置いてある。) ここでは次の方法を説明しておく。ユークリッドの互除法より安易だが、計算の手間はこちらのほうが少しだけ増える。

補題 2.2. K, L, α は上の補題の通りとし、p は $p(\alpha) = 0$ を満たすような K 係数の多項式であるとする。このとき、任意の K 係数の多項式 f, g に対して、次のことが成り立つ。

(1) $g(X)$ を $p(X)$ で割った商を $a(X)$, 余りを $b(X)$ とする。すなわち、

$$g(X) = a(X)p(X) + b(X)$$

とすると、

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{b(\alpha)}$$

(2) $p(X)$ を $g(X)$ で割った商を $q(X)$, 余りを $r(X)$ とする。すなわち、

$$p(X) = q(X)g(X) + r(X)$$

とすると、

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = -\frac{f(\alpha)q(\alpha)}{r(\alpha)}$$

問題 2.1. $\xi \in \mathbb{C}$ は $\xi^5 + 2\xi + 1 = 0$ を満たすような複素数であるとする。このとき、

$$\frac{1}{1+\xi+\xi^2}$$

を ξ の有理数係数の多項式に直しなさい。