代数学III 要約 NO.8

今日のテーマ

$\boxed{3\text{次・}4\text{次の方程式の解法}}$

$$X^3 - aX^2 + bX - c = 0$$

を解こう。この方程式の根を x_1, x_2, x_3 とする。根が何であるか、具体的に知らないわけだが、その存在は既に知っている。x_1, x_2, x_3 の持つ性質から逆算して、その解き方を見ようというわけだ。

根と解の違いは何だろうか。解は方程式に代入してみたときの答えである。根は、もっと根本的なもので、

$$(\bigstar) \qquad X^3 - aX^2 + bX - c = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

と一次式の積に因数分解したときに現れるものをさす。(したがって、当然、根がだぶる (重根) こともある。「根」というときには厳密には多項式 $X^3 - aX^2 + bX - c$ の根というのが正しい。)

上の式 ($\bigstar$) を展開することにより、いわゆる根と係数の関係

$$x_1 + x_2 + x_3 = a, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b, \quad x_1x_2x_3 = c$$

が得られる。a, b, c は知っている数だから、x_1, x_2, x_3 の基本対称式の値を知っているということになる。前回に述べたことにより、x_1, x_2, x_3 の対称式の値もこれらから (x_1, x_2, x_3 の値を個別に知らなくても) 計算できる。

したがって、如何にして便利な対称式を作るか、が大事になる。ラグランジュの分解式

$$r_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3, \quad r_2 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$$

を考えてみよう。(ただし $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2.$) これら自体は x_1, x_2, x_3 の対称式ではないが、

補題 8.1. $t_1 = r_1^3 + r_2^3$ と $t_2 = r_1^3 r_2^3$ はともに x_1, x_2, x_3 の対称式である。

対称式に関する一般論により t_1, t_2 はもとの係数 a, b, c の多項式であることがわかる。(実際に計算してみると $r_1 r_2$ も対称式であることがわかる。) 具体的には

$$(\ast) \qquad \begin{aligned} & t_1 = 2S_{x_1^3} - 3S_{x_1^2 x_2} + 12 S_{x_1 x_2 x_3}, \\ & r_1 r_2 = S_{x_1^2} - S_{x_1 x_2}, \qquad t_2 = (r_1 r_2)^3. \end{aligned}$$

したがって、r_1^3, r_2^3 を二次方程式

$$X^2 - t_1 X + t_2 = 0$$

の 2 根として計算することができ、それらの 3 乗根として r_1, r_2 もまた計算できる。そこから x_1, x_2, x_3 を出すのは実は一次方程式を解けばよいので簡単である。

4 次方程式の場合を考えよう。(前ページと記号が一部重複するが混乱しないこと) 根を x_1, x_2, x_3, x_4 とおくと、

$$X^4 - aX^3 + bX^2 - cX + d = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4).$$

ここから根と係数の関係が得られ、やはり x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式は a, b, c, d から (x_1, x_2, x_3, x_4 の値を知らなくても) 計算できる。

ラグランジュの分解式として、

$$r_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \quad r_2 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \quad r_3 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

をとる。$r_1^2,\ r_2^2,\ r_3^2$ の基本対称式

$$u_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad u_2 = r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_3^2 r_1^2, \quad u_3 = r_1^2 r_2^2 r_3^2$$

はそれぞれ x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式になっていることが分かり、したがって a, b, c, d から計算できる。すなわち、r_1^2, r_2^2, r_3^2 は

$$X^3 - u_1 X^2 + u_2 X - u_3$$

の三根であるから、前段のように巾根を用いて a, b, c, d から計算できる。あとはその平方根を計算すれば、r_1, r_2, r_3 が計算されて、一次方程式の根として x_1, x_2, x_3, x_4 が計算されるという仕組である。

問題 8.1. 3 次方程式の解法で、途中の (*) 式を証明しなさい。

問題 8.2. 3 次方程式の解法で、途中の t_1, t_2 を a, b, c で表しなさい。

問題 8.3. 四次方程式の解法で、$u_1,\ u_2,\ u_3$ を a, b, c, d の多項式として実際に書き下しなさい。(特に難問というほどではないが、計算はかなり面倒である。可能ならば数式処理ソフトなどを活用するとよい。)