代数学 III 要約 NO.9

今日のテーマ

$\boxed{\text{正規拡大}}$

$K=\mathbb{Q}$ 上の拡大体 $L=\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ のように、L の元 $\sqrt[3]{2}$ の $\mathbb{Q}$ 上の共役が必ずしも L に属するとは限らない場合がある。そのような例と「良い」例とを区別するため、つぎの定義を用意する。

定義 9.1. K の有限次代数拡大体 L が K の正規代数拡大であるとは、L の任意の元 a に対して、a の K 上の最小多項式 $f_a(X)$ が L 上では一次式の積に分解するときに言う。

定義から、次のことは容易に分かる。

補題 9.1. K の有限次代数拡大体 M と、そのまた有限次代数拡大体 L があったとする。もし、L が K の正規代数拡大体ならば、L は M の正規拡大体でもある。

正規拡大の判定条件は、つぎのとおり。

補題 9.2. 体 K とその代数拡大体 L があって、$L=K(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ であるとする。このとき、L が K 上の正規拡大体であるための必要十分条件は、L の K 上の生成元 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ の共役がすべて L に属することである。

命題 9.1. 体 K の任意の有限次代数拡大体 M に対して、M を部分体として含むような K の有限次代数拡大 L で、K の正規代数拡大であるようなものが存在する。

定義 9.2. $\mathbb{Q}$ を部分体として含む体 K にたいして、K の有限次正規代数拡大体のことを K の (有限次) ガロア拡大と呼ぶ。

定義 9.3. 体 K のガロア拡大が与えられているとする。L の環としての自己同型で、K の元を動かさないものを $\mathrm{Gal}(L/K)$ (または $\mathrm{Aut}_K(L)$) と書き、L の K 上のガロア群と呼ぶ。

ガロア群と、体とのあいだの関係を記述するのが、いわゆるガロア理論である。

問題 9.1. $\mathbb{Q}$ 上の 0 でない一変数多項式 $f(X)$ で、

$$f(\sqrt[3]{5}+\sqrt{7})=0$$

を満たすものを一つ挙げて、その理由を述べなさい。答えは因数分解されたかたちで書いてもよい。

問題 9.2. 体 K 上の一変数多項式 f が与えられたとする。このとき、f の全ての根を K に付け加えた体 L は K の正規拡大体であることを示しなさい。