本講義の目的 : $\boxed{\text{極限と連続性の詳論}}$

第一回目の主題 : $\boxed{\text{数学の表記法}}$

定義 1.1. 以下この講義では次のような記号を用いる。

(1) $\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合。
(2) $\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合。
(3) $\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合。
(4) $\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合。

◎集合と、その元との区別が大事。

定義 1.2. 実数 a, b について、閉区間 $[a, b]$ と開区間 (a, b) をつぎの式で定める。

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

◎ $[a, b]$ には端点があって、そこでのようすは $[a, b]$ のほかの点のようすと大きく異っている。それに対して、(a, b) の各点はどの点も似ている。

上限, 上界

定義 1.3. $\mathbb{R}$ の部分集合 A が与えられているとする。 このとき

(1) $a \in \mathbb{R}$ が A の上界 (upper bound) であるとは、

$$\forall x \in A (x \leq a)$$

(つまり、どの $x \in A$ をもってきても $x \leq a$) が成り立つときに言う。

(2) $a \in \mathbb{R}$ が A の上限 (supremum) であるとは、A の上界のうち最小のものをいう。

◎ 集合の上界は存在するとは限らない。また、上界が存在したとしても一般にはいくつもあることに注意。

定義 1.4. 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとは、A が上界を少なくとも一つもつときに言う。

次の定理は実数の基本的な性質である。次回以降詳しく解説する。

定理 1.1. $\mathbb{R}$ の部分集合 A で、上に有界なものは、必ず上限を唯一つもつ。

問題 1.1.

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x^3 - 25x - 100 < 0\}$$

は上界をもつだろうか、もつ場合には上界を一つ挙げてその理由を説明し、もたない場合にはもたないことの理由を説明せよ。