数列と収束の定義

•定義とは、 言葉の使い方のとりきめのことである。数学では、どのような言葉も、そのような取り決めなしで使われることはない。(ただし、「整数」「有理数」、「和」、「積」などの言葉をきちんと定義するのは手間がかかる。それらについて詳細に定義するのはこの講義では控える。(端的に言えば、整数は帰納法を援用して定義し、有理数は整数の「商」 m/n に適当な「等しいかどうかの判定規則」と定義する。) それらについて詳細に定義するのはこの講義では控える。実数は有理数の極限として定義するのだが、今日はその「極限」の話題である。)

•$\forall$ と $\exists$ とはなにか。

$$\forall x....$$

は、「どんな x に対しても、 $....$ がなりたつ」という意味。

$$\exists x....$$

は、「なにかある一つの x に対しては、 $....$ がなりたつ」という意味で用いる。

定義 2.1. 集合 X から集合 Y への写像 $(=$関数$)$ f が与えられているとは、X の各元 x に対してその像 $f(x)$ が $($いつどこで誰が計算しても、間違いさえなければ$)$ 一通りに決まっているときに言う。

正の整数の全体のことをこの講義では $\mathbb{Z}_{>0}$ と書く。数列とは、数学的には次のように定義できる。

定義 2.2. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とは、 $\mathbb{Z}_{>0}$ から $\mathbb{R}$ への写像のことである。

数列が「収束する」ということの厳密な定義をしよう。それには、絶対値を用いる。

定義 2.3.

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

(ただし平方根は 0 以上のほうを選ぶ。)

定義 2.4. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 c に収束するとは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N (n > N \implies |a_n - c| < \epsilon)$$

がなりたつときに言う。

この定義が使いこなせるようになれば、この講義の目標の 80% は達せられたと言って良い。

問題 2.1. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ が } 10 \text{ の倍数のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義するとき、 a_n は何かある値に収束するだろうか。上の定義に基づいて理由を述べて答えなさい。