収束に関する諸定理 (2), 単調増加・減少数列.

お持ち帰りにいたしますか?ここでお食べになりますか?

–どちらでもいいです. (マクドナルドにて by フヘ)

- **三角不等式**

$$|a+b| \le |a| + |b| \qquad (\forall a, \forall b \in \mathbb{R})$$

定理 4.1. *(テキスト "定理 1.2")*

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0$$

(2) $a_n \le b_n \quad (\forall n)$ で、かつ $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束するなら、

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

(3) $a_n \le c_n \le b_n \quad (\forall n)$ で、かつ $\{a_n\}, \{b_n\}$ が同じ数 α に収束するなら、 $\{c_n\}$ も α に収束する。

定理 4.2. *(テキスト "定理 1.3")* 収束する数列は有界である。

定理 4.3. *(テキスト "定理 1.4")* 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ収束するとする。このとき、

(1) 「極限をとる」という操作は線形である。すなわち、$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ は収束して、

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda(\lim_{n\to\infty} a_n) + \mu(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

(2) 「実数の乗法は連続である。」

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

(3) 実数の除法は「連続」である。もっと詳しく言うと、$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ なら、有限個の例外を除いて $b_n \neq 0$ であって、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)/(\lim_{n\to\infty} b_n).$$

定義 4.1. 実数列 $\{a_n\}$ が単調増加であるとは、

$$\forall n \forall m (n \ge m \implies a_n \ge a_m)$$

がなりたつときにいう。

次の定理は、既知の数から未知の数 (e など) を作り出すときに有効である。

定理 4.4. *(テキスト "定理 1.5")* 上に有界な単調増加数列は収束する。

問題 4.1. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が c に収束するとき、

$$\{a_n^3 + 5a_n^2 + 7\}_{n=1}^{\infty}$$

は収束すると言えるだろうか。言えるならばその収束先と理由を、言えないならば反例を作りなさい。