

区間縮小法と部分列

定理 6.1. (“定理 1.6” [区間縮小法]) 閉区間の列 I_n について、 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \dots$ がなりたつとする。このとき、

$$\bigcap_n I_n \neq \emptyset.$$

さらに、 I_n の長さを $\text{length}(I_n)$ と書くとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{length}(I_n)) = 0$$

のなりたつならば、 $\bigcap_n I_n$ はただ一点のみからなる。

定義 6.1. 数列 $\{a_n\}$ が与えられているとする。このとき、自然数の増加列 $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ を定めて、

$$\{a_{n_j}; j = 1, 2, 3, \dots\} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\}$$

を $\{a_n\}$ の部分列という。(教科書の 1.2.6 は少し書き間違いがあるので注意。)

例えば

$$\{a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}, a_{13} \dots\} = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$$

や

$$\{a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, a_{13}, \dots\}$$

($\{a_n\}$ のうち素数番目のものを取りだしたもの)、

$$\{a_2, a_4, a_8, a_{16}, a_{32}, a_{64}, a_{128} \dots\} = \{a_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$$

などはすべて $\{a_n\}$ の部分列である。

定理 6.2. (“定理 1.9”)[ボルツァノ・ワイエルシュトラス] 有界な数列は、収束する部分列を持つ。

問題 6.1. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} \frac{2n+5}{n^3+3n+5} & (n \text{ が素数のとき}) \\ \frac{2n+5}{n^3+3n+5} + 1 & (n \text{ が上記以外でかつ (素数+1) と等しいとき}) \\ \frac{2n+5}{n^3+3n+5} + 2 & (n \text{ が上記以外でかつ (素数+2) と等しいとき}) \\ \frac{2n+5}{n^3+3n+5} + 3 & (n \text{ が上記以外でかつ (素数+3) と等しいとき}) \\ \frac{2n+5}{n^3+3n+5} + 4 & (n \text{ が上記以外のとき。}) \end{cases}$$

で定義する。このとき、

- (1) $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{15}\}$ のグラフを折れ線グラフで描きなさい。
- (2) $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_j}\}$ で、1 に収束するものの例を実際に挙げ (この部分の証明は今回は省略して良い)、

$$j > N \implies |a_{n_j} - 1| < \frac{1}{512}$$

を満たす N の値の例を挙げなさい (こちらは証明も書くこと。)