$\boxed{\text{関数の連続性の定義}}$

定義 10.1. f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、f が a で連続であるとは、

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

がなりたつときにいう。

極限の定義により、上の定義は次のように言い換えられる。

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; (0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

$x = a$ の場合を考慮に加えると、次のような定理がなりたつことがわかる。

定理 10.1. f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、f が a で連続であることは、次の条件と同値である。

$$\boxed{(☆)\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; (|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)}$$

上の定義で、 $|x-a|$ は x と a の距離、 $|f(x) - f(a)|$ は $f(x)$ と $f(a)$ の距離であることに注意する。上の定理による連続性の「定義」は多変数関数や、距離空間のあいだの写像の連続性の定義にそのまま一般化することができる。

上の定理は「定理」ではあるが、連続性の定義における "$x = a$" の「例外的な扱い」を取り除いてむしろ自然な形をしている。そこでこの講義ではもっぱら連続性を確かめるには上の定理の (☆) で判定することにする。

例題 10.1. $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x) : x \to x^4 - 5x^3$ にたいして、

(1)
$$|x-5| < \delta \implies |f(x) - f(5)| < 0.1$$
を満たす正の数 δ の例を挙げ、実際にそれがなりたつことを確かめなさい。

(2)
$$|x-5| < \delta \implies |f(x) - f(5)| < 0.01$$
を満たす正の数 δ の例を挙げ、実際にそれがなりたつことを確かめなさい。

(3) $f(x)$ は $x = 5$ で連続であることを (☆) を確かめることにより証明しなさい。

◎ $\forall, \exists, \implies$ の否定。

一般に、

- 「$\forall x P(x)$」 の否定は 「$\exists x (\neg P(x))$」 である。
- 「$\exists x P(x)$」 の否定は 「$\forall x (\neg P(x))$」 である。
- 「$P \implies Q$」 の否定は 「P かつ $(\neg Q)$」 である。

したがって、(☆) の否定、すなわち、 「f が a で連続でない」ことは、次のように書き表すことができる。

$$\boxed{(★)\ \exists \epsilon > 0; \forall \delta > 0\ (|x-a| < \delta \text{ かつ } |f(x) - f(a)| \geq \epsilon)}$$

問題 10.1. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & (x \neq 0 \text{ のとき }) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき }) \end{cases}$$

で定義するとき、 f は $x = 0$ で連続ではないことを証明しなさい。