微分積分学概論 AI 要約 NO.11

$\boxed{\text{連続関数の性質}}$

定理 11.1 (“教科書定理 1.13”)**.** 関数 f が $x = a$ で連続とし、 $f(a) > 0$ とする。このとき、$\exists \delta > 0$ で、

$$(a-\delta, a+\delta) \implies f(a) > 0$$

を満たすものが存在する。

次のことは、「連続 $\Longrightarrow$ グラフがつながっている」ということの表現法の一つと言える。

定理 11.2 (“教科書定理 1.14”, 中間値の定理)**.** 関数 f が閉区間 $[a,b]$ で連続 (すなわち、$[a,b]$ の各点で連続) とする。このとき $f(a)$ と $f(b)$ の中間の値 γ にたいして、$f(c) = \gamma$ をみたすような $c \in [a,b]$ が存在する。

上の定理は、位相空間論において「連結集合の連続像は連結である」という定理に一般化される。区間は実数直線の連結部分集合として特徴づけることができる。

定理 11.3 (“教科書定理 1.15”, ワイエルシュトラスの定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f は必ず最大値をとる。(とくに f は $[a,b]$ で有界である。

上の定理は、位相空間論において「コンパクト集合上の連続関数は最大値をとる」という定理に一般化される。閉区間はコンパクト集合の重要な例である。

例題 11.1. ワイエルシュトラスの定理で、閉区間を考えているのは大変重要である。そこで、

(1) 開区間 $(0,1)$ で連続な関数 f で、有界でないものの例を挙げ、実際にそれが有界でないことを示しなさい。
(2) 開区間 $(0,1)$ で連続な関数 f で、有界だが、最大値をもたないものの例を挙げ、その f について実際に

$$\{f(x); x \in (0,1)\}$$

の上限を求め、最大値は存在しないことを示しなさい。

問題 11.1. 閉区間 $[0,1]$ で定義された実数値関数 f が、$f(0) = 0$ かつ

$$f(x) \neq 1 \qquad (\forall x \in [0,1])$$

を満たすとき、ある正の数 ϵ で、

$$f(x) < 1 - \epsilon \qquad (\forall x \in [0,1])$$

を満たすものが存在することを証明しなさい。