## 初等関数

三角関数, 指数関数, 対数関数等のいわゆる初等関数を数学的に厳密に定義するためには、もうすこし準備を要する。具体的には、角度、線分の長さ、面積の具体的な定義や、べき級数のとりあつかい等である。ただ、これらの関数を全く知らないでいると不便なので、ある程度厳密性を犠牲にして以下では概略を述べる。高校までにならったことを思い出しておくとよい。

**定義 13.1.** $x$-$y$ 平面の単位円 $C : x^2 + y^2 = 1$ を考える。$x$ 軸の正の部分と角度 $\theta$ だけ進んだ半直線 $\ell$ と $C$ との交点 $P$ の $x$ 座標を $\cos(x)$, $y$ 座標を $\sin(x)$ と書く。

注意点: 角度は (とくに断らない限り) 常に弧度法を用いる。

**定理 13.1.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

定義 5.1 の $e$ を思い出しておこう。

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

**定義 13.2.** 指数関数 $e^x$ の逆関数を $\log(x)$ で書き、$x$ の自然対数とよぶ。

注意点: 数学では断らない限り対数の底としては $e$ をとり、自然対数を考えるのが普通である。

**定理 13.2** (“定理 1.19”)**.** 次のことがなりたつ。

(1) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.
(2) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.
(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$.
(4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

**例題 13.1.** 本問では、三角関数、指数関数の性質はある程度証明なしに使って良い。

(1) 実数直線 $\mathbb{R}$ で定義された関数 $f(x)$ で、
$$f(x+1) > f(x) \qquad (\forall x\in\mathbb{R})$$
をみたすが、(広義でも狭義でも) 単調増加ではないものの例をあげなさい。
(2) 実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数で、狭義単調増加、かつ有界であるが、$\mathbb{R}$ 上で最大値も最小値も持たないものの例をあげなさい。

**問題 13.1.** 次のような実数値連続関数 $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の例を一つ挙げなさい。

(1) $f(2n) = n^2 \qquad (\forall n\in\mathbb{Z})$.
(2) $f(2n+1) = n^2 \qquad (\forall n\in\mathbb{Z})$.
(3) $f$ は (広義でも狭義でも) 単調増加ではない。