

今日のテーマ 《準同型と準同型定理》

**定義 6.1.**  $R, S$  はともに (可換とは限らない) 環であるとし、 $f : R \rightarrow S$  をその間の写像とする。このとき、 $f$  が  $R$  から  $S$  への (環) 準同型写像であるとは、次の条件が成り立つときにいう。

- (1)  $f$  は  $(R, +)$  から  $(S, +)$  への群としての準同型である。すなわち、

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

が、すべての  $R$  の元  $a, b$  について成り立つ。

- (2)  $f$  は  $R$  の積を  $S$  の積にうつす。すなわち、

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

が、すべての  $R$  の元  $a, b$  について成り立つ。

- (3)  $f$  は  $(R)$  の単位元を  $(S)$  の単位元にうつす。すなわち、

$$f(1_R) = 1_S$$

が成り立つ。

**定義 6.2.** 環のあいだの全単射準同型のことを、(環としての) 同型とよぶ。容易にわかるように、環のあいだの同型  $f : R \rightarrow S$  が与えられたとき、 $f$  の逆写像  $f^{-1}$  は  $S$  から  $R$  への同型になる。

群 (加法群) についての準同型の知識を使うと、次のことは直ちにわかる。

**補題 6.1.** 環準同型  $f : R \rightarrow S$  について、

- (1)  $f(0_R) = f(0_S)$  が成り立つ。  
 (2)  $f(-a) = -f(a)$  が全ての  $a \in R$  に対して成り立つ。

つぎに、準同型定理の説明にはいる。

**定義 6.3.** 環準同型  $f : R \rightarrow S$  について、 $f^{-1}(0) (= \{r \in R; f(r) = 0\})$  のことを、 $f$  の核 (Kernel) と呼び、 $\text{Ker}(f)$  で書き表す。

$f$  の像 (Image) とは、通常通り、

$$\text{Image}(f) = \{f(r); r \in R\}$$

のことである。

**補題 6.2.** 任意の環準同型  $f : R \rightarrow S$  にたいして、

- (1)  $\text{Ker}(f)$  は  $R$  のイデアルである。  
 (2)  $\text{Image}(f)$  は  $S$  の部分環である。

**定理 6.1.** 環準同型  $f : R \rightarrow S$  について、 $R$  の同値関係  $\sim_f$  を

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

で定義し、また  $r \in R$  の  $R/\text{Ker}(f)$  でのクラスを  $\bar{r}$  とすると、次のことが成り立つ。

- (1)  $x, y \in R$  にたいして、

$$x \sim_f y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

が成り立つ

- (2)  $f$  は

$$\bar{f} : R/\text{Ker}(f) \ni \bar{r} \mapsto f(r) \in \text{Image}(f) \quad (r \in R)$$

なる同型を誘導する。

代数では群、加群、環、Lie 環など、いろいろなモノについてそれぞれ「準同型定理」がなりたつが、それはすべて次の単純な事実に基づく：

写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられたとき、 $f$  の行き先でわけることによって  $X$  のクラスわけができる。

※レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限: 次の講義の終了時まで。)

- (I) 環の準同型  $f: \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \ni [a]_{15} \mapsto [a]_5 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  ( $[?]_n$  は? の  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  におけるクラス) を考える。(本当は、 $f$  がうまく定義されていること、さらに  $f$  が実際に環の準同型であることを諸君が証明すべきだが、ここではそれは要求しない。) このとき、
- (a)  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  の元  $x$  15 個のそれぞれについて、 $f(x)$  を書きなさい。
  - (b)  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  の元  $y$  5 個のそれぞれについて、 $f^{-1}(y)$  を書きなさい。
- (II)  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \ni [n]_{11} \mapsto [n]_5 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  はうまく定義されて、環準同型になるだろうか。
- (III) 正の整数  $k, l$  が与えられたとき、 $k, l$  にどのような関係があれば、 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \ni [n]_k \mapsto [n]_l \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  はうまく定義されて、環準同型になるのか、答えなさい。