

## 代数学演習 I 問題 NO.8

準同型定理編 (2) 今回 (No.8) は、「環」と言えば単位元を持つ可換環のことを指すことにします。また、「準同型」は単位元を保つものだけを考えることにします。

問題 8.1.  $\mathbb{Q}[\sqrt{6}] \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 6)\mathbb{Q}[X]$  を示しなさい。

問題 8.2. 有理数体  $\mathbb{Q}$  の部分集合  $\mathbb{Z}[1/5] = \{m/5^n; m \in \mathbb{Z}; n = 0, 1, 2, \dots\}$  は  $\mathbb{Q}$  の部分環になることを示しなさい。

問題 8.3.

$$(5X - 1)\mathbb{Q}[X] \cap \mathbb{Z}[X] = (5X - 1)\mathbb{Z}[X]$$

を示しなさい。

問題 8.4.

$$\mathbb{Z}[1/5] \cong \mathbb{Z}[X]/(5X - 1)\mathbb{Z}[X]$$

を示しなさい。

問題 8.5. 環  $R$  のイデアル  $I$  と変数  $X$  について、次の同型を示しなさい。

$$R[X]/IR[X] \cong (R/I)[X]$$

問題 8.6. 環  $S$  の部分環  $R$  と  $S$  のイデアル  $I$  について、

$$R + I = \{r + a; r \in R, a \in I\}$$

は、 $S$  の部分環となることを示しなさい。

問題 8.7. 環  $S$  の部分環  $R$  と  $S$  のイデアル  $I$  について、

$$S = R + I, \quad R \cap I = 0$$

が成り立てば、 $S/I \cong R$  となることを示しなさい。

問題 8.8. 環準同型  $f: R \rightarrow S$  について、 $J$  が  $S$  のイデアルであれば、 $f^{-1}(J)$  は  $R$  のイデアルとなることを示しなさい。

問題 8.9. 環準同型  $f: R \rightarrow S$  について、 $I$  が  $R$  のイデアルのとき、 $f(I)$  は  $S$  のイデアルとなりますか? (ならなければ反例を挙げてください。)  $f$  が全射ならどうですか?

問題 8.10.  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  の元をすべて書き並べて、 $\bar{0}$  以外の元の逆元をそれぞれ求めなさい。

問題 8.11.  $K$  を体とします。このとき同型  $K[X, Y]/XK[X, Y] \cong K[Y]$  を示しなさい。

問題 8.12. 環  $S$  とその部分環  $R$  とについて、 $P$  が  $S$  の素イデアルならば、 $P \cap R$  は  $R$  の素イデアルであることを示しなさい。「素イデアル」を「極大イデアル」にかえるとどうか?

問題 8.13. 環  $R$  のイデアルに  $I$  について、 $I \cdot I$  を  $I^2$  と略記します。 $J$  も  $R$  のイデアルで、 $I + J = R$  となれば、 $I^2 + J^2 = R$  となることを示しなさい。

問題 8.14. 整域  $R$  の元  $a, b$  について、次を示しなさい。

- (1)  $a|b$  である (すなわち、ある  $c \in R$  があって、 $b = ac$  と書ける) ことと、 $aR \subset bR$  とは同値である。

- (2)  $a$  と  $b$  とが同伴である (すなわち、 $a|b$  かつ  $b|a$  が成り立つ) ことと、 $aR = bR$  とは同値である。

問題 8.15. 実数体  $\mathbb{R}$  上の多項式  $aX^2 + bX + c$  が環  $\mathbb{R}[X]$  で既約となる条件は、 $b^2 - 4ac < 0$  であることを示しなさい。

問題 8.16. 体  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  上の二次式  $X^2 - a$  ( $a = \bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{10}$ ) が既約かどうかをそれぞれの  $a$  について調べなさい。

問題 8.17.  $3^{100000}$  を 17 で割った余りを求めなさい。

問題 8.18. 自然数  $n$  が与えられたとします。次の関係式を満たす  $f, g \in \mathbb{C}[X]$  を一組見つけなさい。

$$(1 + X)f(X) + X^n g(X) = 1$$

以下は初等整数論からの補遺です。

問題 8.19. 正の整数  $a, b$  の最大公約数が 1 であるための必要十分条件は、

$$al + bm = 1$$

を満たす整数  $l, m$  が存在することである。これを示しなさい。

問題 8.20. (この問題に限っては前問が解けている、いないに拘わらずその結果を使ってよい。(いずれにせよ講義でやるから。)) 前問を用いて、 $a, b$  が互いに素ならば、 $a^2$  と  $b^2$  も互いに素であることを示しなさい。

問題 8.21. 前問を用いて、 $a, b$  が互いに素ならば、 $a^2$  と  $b^2$  も互いに素であることを示しなさい。

問題 8.22. 前問をもちいて、 $\sqrt{6}$  は無理数であることを証明しなさい。ただし、素因数分解の一意性の知識を用いないこと。

問題 8.23. 前問と同じ前提条件で、一般に、平方数でない (つまり、 $\{n^2; n \in \mathbb{Z}\}$  の元ではない) 整数  $m$  にたいして、 $\sqrt{m}$  は無理数であることを証明しなさい。

問題 8.24. 整数係数の多項式

$$p(X) = \sum_{j=0}^n a_j X^j \quad (a_j \in \mathbb{Z} \ (j = 0, 1, 2, \dots, n), \quad a_n \neq 0)$$

について、 $p$  の、0 でない有理根  $r$  があつたとする。すなわち、 $p(r) = 0$  とする。 $r$  を既約分数  $\frac{l}{m}$  と書いたとき、

- (1)  $r$  の分子  $l$  は  $p$  の定数項  $a_0$  の約数であることを示しなさい。
- (2)  $r$  の分母  $m$  は  $p$  の最高次の係数  $a_n$  の約数であることを示しなさい。