代数学演習 I 問題 NO.11

環の直積分解

問題 11.1. $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ の元を全て挙げなさい。

問題 11.2. $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$ の元を全て挙げなさい。

問題 11.3. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ であることを示しなさい。

問題 11.4. $f : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ を

$$f([x]_4) = [9x]_{12}$$

で定義する。このとき、f はうまく定義されて、和と積を保つが、単位元を保たない (したがって、本演習では環準同型の仲間には入れない) ことを示しなさい。

問題 11.5. 単位元を持つ可換環 R, S の間の写像 $f : R \to S$ が和と積を保つとします。このとき、次のことをすべて示しなさい。

(1) $e = f(1)$ は S の巾等元である。
(2) $S_1 = eS$ とおくと、S_1 は環であって、f は R から S_1 への環準同型を定義する。

問題 11.6. l, m を互いに素な正の整数とし、

$$f : \mathbb{Z}/lm\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

を

$$f([x]_{lm}) = ([x]_l, [x]_m)$$

で決める。このとき、

(1) f はうまく定義されていることを示しなさい。
(2) f は環準同型であることを示しなさい。
(3) f の核はどうなるか？
(4) $\mathbb{Z}/lm\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の元の個数をそれぞれ言いなさい。
(5) $f([x]_{lm}) = ([1]_l, [0]_m)$ を満たす整数 x が存在することを示しなさい。
(6) 上の x にたいして、

$$x = k_1 l + 1 = k_2 m$$

なる整数 k_1, k_2 が存在することを示し、そのことから、

$$al + bm = 1$$

を満たす l, m が存在することの証明を与えなさい。

問題 11.7. (1) $\mathbb{C}[X]$ のなかの元 $f(X)$ で、$3X$ で割ると 1 余り、$5X^2 - 1$ で割ると $X + 3$ 余るようなものの例を一つ挙げなさい。
(2) 上のような $f(X)$ を全て求めなさい。