$\boxed{\text{例を挙げること}}$

例には次のような効用がある。

- 定義自体が完全であることをチェックする。
- 相手 (自分) が正しく理解するのを助ける。
- 定義に慣れる。
- 机上の空論になるのを避けることができる。
- 議論の重要な部分をより具体的に理解できる。
- 新しいアイディアを産むヒントになる。
- 正しくない議論を (反例を挙げることにより) 避けることができる。

例を挙げるときには、次のことに注意すると良い。

- できるだけ単純な、誰でも理解できる例を挙げるように努力すること。
- (実験などの場合) 例が再現性を持つことを確認しておくこと。
- その例が、今の議論にどのように適合するのか、説明すること。
- その例のもつ特殊事情、詳細もうまく説明できると説得力を持つ場合がある。

**例題 2.1.** 円周率 $\pi$ を十進小数で表現したときに、"99" が現れることがあるだろうか。

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots$$

なので、小数点以下第 44 位, 第 45 位がちょうど 99 である。

このように**相手にも分かるように**、できるだけ**具体的に**指摘したほうがよい。

3 より大きな実数は存在する。

という命題は正しいが、これは 3 より大きな実数の存在 (たとえば、5) を頭で思い浮かべているからそう思うのであって、その **頭の中の考えを取り出して、**

○ 5 は実数であって、 3 より大きい

と言ったほうがよい。

前回の問題 (2) でも 式だけ計算して、つまり、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{pmatrix}$$

の計算だけして、両者が等しくないと即断すべきではない。実際の両者が異るような実数 $a,b,c,d,p,q,r,s$ の例が存在することを示すべきである。さもなければ

**命題 2.1.** 異る実係数多変数多項式 $f(x_1,\ldots,x_n)$, $\quad g(x_1,\ldots,x_n)$ にたいし、$f(a_1,\ldots,a_n) \neq g(a_1,\ldots,a_n)$ なる実数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ が存在する。

という命題を証明することになるが、これはそれなりに難しい。実数体の代わりに、有限体の場合には命題 2.1 は実はウソなのだ。)

**問題 2.1.** (1) 複素数 $z,w$ が、$zw=0$ をみたしているとする。このとき、$z=0$ か $w=0$ のどちらかが成り立つことを示しなさい。

(2) 2次正方行列 $A,B \in M_2(\mathbb{R})$ が $AB=0$ をみたしているとする。このとき、 $A=0$ か $B=0$ のどちらかが成り立つと必ず言えるだろうか?

複素数についてもう少し関連する定義を書いておこう。複素数 $z$ は、$z = a + bJ$ ($a, b$ は実数) と一意に書けたのであった。$J$ は $J^2 = -1$ を満たす「数」である。これのことを $i$ とか、$J$ とか呼び続けてもよいのであるが、ここでは記号の節約のために以降は $\sqrt{-1}$ と書こう。 $\sqrt{-1}$ はしばしば虚数単位と呼ばれる。

**定義 2.1.** 複素数 $z$ について、 $z = a + b\sqrt{-1}$ ($a, b$ は実数) と書いたとき、

(1) $a$ のことを $z$ の**実部**といい、$\Re z$ と書く。
(2) $b$ のことを $z$ の**虚部**といい、$\Im z$ と書く。
(3) $a - b\sqrt{-1}$ のことを $z$ の**複素共役**といい、$\overline{z}$ と書く。

複素数は実部と虚部で与えてもいいのだが、それでは値打ちが少ない。代わりに複素共役を使うことを考えよう。

**補題 2.1.** $z$ の実部と虚部は $z$ と $\overline{z}$ を用いて

$$\Re z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2\sqrt{-1}}$$

と書ける。

複素数の定義も思い出してみよう。

**補題 2.2.**

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

に対して、その複素共役は

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ の転置行列} \right)$$

である。

転置行列に関する一般論により、つぎのことが成り立つことがわかる。

**命題 2.2.** 任意の複素数 $z, w$ に対して、次のことが成り立つ。

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
(2) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$
(3) $\overline{zw} = \overline{w}\ \overline{z}$

さらに、

**命題 2.3.** 複素数 $z$ に対して、$z\overline{z}$ は実数であり、さらに $z = a + b\sqrt{-1}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) と書くと、

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 (\geq 0)$$

であることが分かる。

**定義 2.2.** 複素数 $z$ に対して、$z\overline{z}$ の非負の平方根 $\sqrt{z\overline{z}}$ を $z$ の**絶対値**と呼び、$|z|$ で書く。

$$|z|^2 = \det \left( \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \right)$$

にも注意しよう。