# 解析学 IA 演習 NO.1

心構え:

(1) とくに断らない限り、各問題には理由をあげて答えること。
(2) 問題に図形がでてきた場合には、できる限りその概形を描くこと。
(3) 注意書きがないものは各問1点。3点で合格。

**問題 1.1.** 三角不等式を用いて、任意の $P, Q, R, S \in \mathbb{R}^n$ にたいして、

$$d(P,Q) + d(Q,R) + d(R,S) \geq d(P,S)$$

が成り立つことを示しなさい。

**問題 1.2** (各1点)**.** つぎの $\mathbb{R}^2$ の部分集合はそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の開集合だろうか？

(1) $\{(x,y)|0 < x < 1\}$.
(2) $\{(x,y)|0 < x < 1$ かつ $0 < y < 1\}$.
(3) $\{(x,y)|0 \leq x \leq 1$ かつ $0 \leq y \leq 1\}$.
(4) $\{(x,y)|x^2 < 1\}$.
(5) $\{(x,y)|0 < xy < 1\}$.
(6) $\{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$.
(7) $\{(x,y)|xy = 0\}$.

次の問題では、閉集合は「補集合が開集合である」ことで定義することにする。(その定義を用いて解くこと)

**問題 1.3** (各1点)**.** つぎの $\mathbb{R}^2$ の部分集合はそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の閉集合だろうか？

(1) $\{(x,y)|0 < x < 1\}$.
(2) $\{(x,y)|0 < x < 1$ かつ $0 < y < 1\}$.
(3) $\{(x,y)|0 \leq x \leq 1$ かつ $0 \leq y \leq 1\}$.
(4) $\{(x,y)|x^2 < 1\}$.
(5) $\{(x,y)|0 < xy < 1\}$.
(6) $\{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$.
(7) $\{(x,y)|xy = 0\}$.

**問題 1.4.** $\mathbb{R}^n$ の開球 $B_r(x)$ の任意の二点は $B_r(x)$ 内の線分で結べることを示しなさい。別の言い方をすると: $B_r(x)$ 内の任意の二点 $P, Q$ にたいして、$P, Q$ を結ぶ線分の上の任意の点 $R$ は $B_r(x)$ に属することを示しなさい。

**問題 1.5.** (各1) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $S$ を

$$S = \{(x,y)||xy| < 1\}$$

に対して

(1) $S$ は 開集合だろうか?
(2) $S$ は閉集合だろうか?
(3) $S$ の任意の二点は $S$ 内の線分で結ぶことができるだろうか？
(4) $S$ の任意の二点は $S$ 内の折れ線で結ぶことができるだろうか？

**定義 1.1.** $\mathbb{R}^n$ の元の列 $\{P_j; j = 1, 2, 3, \ldots, \}$ が**コーシー列**であるとは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}(n, m > N \implies d(P_n, P_m) < \epsilon)$$

が成り立つときにいう。

**問題 1.6** (各 1。ただし順に解くこと)**.** $\mathbb{R}^n$ の元の列 $\{P_j\}$ がコーシー列であるとする。

$$P_j = (x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, x_j^{(3)}, \dots, x_j^{(n)})$$

と成分表示したとき、

(1) 第一成分の列 $\{x_j^{(1)}; j = 1, 2, \dots\}$ は実数のコーシー列であることを示しなさい。
(2) ある $Q \in \mathbb{R}^n$ があって、$\{P_j\}$ は $Q$ に収束することをしめしなさい。

**問題 1.7.** (各 1) つぎの各集合は $\mathbb{R}^2$ の部分集合として有界であろうか。(本問については各集合の概形は描かなくても良い。)

(1) $\{(x, y); 1 < e^x < 100, 1 < e^y < 500\}$
(2) $\{(x, y); (x-1)^4 + y^4 < 1\}$
(3) $\{(a+b, a-b); a, b \in [0, 5]\}$
(4) $\{(\cos(a^5), e^{-a^2}); a \in \mathbb{R}\}$.

**問題 1.8.** (各 1。但し順に解くこと) $P_n = (\cos(n), \sin(n))$ とおくとき、

(1) $\{P_n; n = 1, 2, 3, \dots\}$ は $(0, 0)$ に収束しないことを示しなさい。
(2) $\{P_n; n = 1, 2, 3, \dots\}$ はなにかある点に収束するだろうか？
(3) $\{P_n; n = 1, 2, 3, \dots\}$ は収束する部分列を持つだろうか？

**問題 1.9.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(x) = (\cos(x), \sin(x))$$

で定めたとき、$f$ のグラフ $\Gamma_f$ の概形を描きなさい。

**問題 1.10.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(x) = (e^x \cos(x), e^x \sin(x))$$

で定めたとき、$f$ のグラフ $\Gamma_f$ の概形を描きなさい。

**問題 1.11.** 前問の $f$ の像は閉集合だろうか?