解析学 IA 演習 NO.2

問題 2.1 (全部で 1 点)**.** つぎの各々の場合について、 P, Q の距離を求めよ。ただし距離は通常の $\mathbb{R}^n$ の距離をもちいることとする。

(1) $P = (1, 2), Q = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$.
(2) $P = (1, 2, 3), Q = (4, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$.
(3) $P = (0, 0, \ldots, 0), Q = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

問題 2.2. $\mathbb{R}^n$ の点 $P = (1, 2, 3, \ldots, n)$ と $\mathbb{R}^n$ の原点との (通常の意味での) 距離はいくらか?

問題 2.3. $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル $e_1, \ldots, e_n$ (を $\mathbb{R}^n$ の点とみなしたもの) のうちどれでも三つ異なるもの P, Q, R をとれば、それは正三角形の頂点をなすこと、つまり $d(P, Q) = d(Q, R) = d(R, P)$ がなりたつことを示しなさい。

問題 2.4. (全部で 1. ただしどちらから解き始めても良い。) 実数列 $\{a_n\}$ が与えられているとする。このとき、

(1) 点列の極限

$$\lim_{n\to\infty}(n^2\cos(a_n)e^{-n}, n^2\sin(a_n)e^{-n})$$

を求めなさい。

(2) 極限

$$\lim_{n\to\infty} n^2\cos(a_n)e^{-n}$$

を求めなさい。

問題 2.5. (各 1) 点列 $\{(a_n, b_n)\}$ が収束するとき、

(1) 数列 $\{(a_n + b_n)\}$
(2) 数列 $\{(a_n - b_n)\}$
(3) 数列 $\{(a_n b_n)\}$
(4) 数列 $\{(a_n/b_n)\}$

はそれぞれ必ず収束するだろうか。収束する場合には証明を、しない場合には反例とその反例が収束しないことの証明を述べなさい。

問題 2.6. 点列 $\{(a_n, b_n, c_n)\}$ が収束するとき、点列 $\{a_n + b_n + c_n, a_n b_n + b_n c_n + c_n a_n, a_n b_n c_n)\}$ は必ず収束するだろうか。

問題 2.7. 前問の逆を問う。すなわち、点列 $\{(a_n, b_n, c_n)\}$ が与えられていて、点列 $\{a_n + b_n + c_n, a_n b_n + b_n c_n + c_n a_n, a_n b_n c_n)\}$ が収束するとき、もとの点列 $\{(a_n, b_n, c_n)\}$ は必ず収束すると言えるだろうか。

問題 2.8. 点列 $\{(a_n, b_n)\}$ が与えられていて、点列 $\{(a_n + b_n, a_n b_n)\}$ が点 $(6, 9)$ に収束するとき、もとの点列 $\{(a_n, b_n)\}$ は必ず収束すると言えるだろうか。

問題 2.9. (各 1) 次の極限は存在するだろうか。するとしたらその極限を求めなさい。(もちろん理由も述べること。)

(1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+y^4}$$

(2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+y^2+y^4}$$

(3)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4+xy}{x^4+y^4}$$

問題 2.10. (各 1) この問題では、D はおのおのの関数の分母が 0 でない集合をさすことにする。(したがって、小問ごとに D は異なる。)

(1)
$$\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to 0} \frac{x^2}{y}$$
は存在するだろうか。

(2)
$$\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to 0} \frac{x^2y^2}{y-x^2}$$
は存在するだろうか。

(3)
$$\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to 0} \frac{e^{y-x^2}-1}{y-x^2}$$
は存在するだろうか。

問題 2.11. 関数 $f(x,y)$ を
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(y-x^2)^2} & (y\geq x^2 \text{のとき}) \\ 0 & (y<x^2 \text{のとき}) \end{cases}$$
で定義する。このとき、f は $(0,0)$ で連続だろうか。